Учебно пособие

за задачи по теоретична механика

гл. ас. Петко Митев, кат. Теоретична физика, ПУ

Тема 1: Координатни системи. Криволинейни координати. Декартови, цилиндрични и сферични координати

(*базисни вектори, параметри на Ламе, градиент и лапласов оператор в тези координати*)

Теоретичен минимум: Множество задачи в механиката могат да се решат по-просто, ако вместо декартови координати се използват други такива, които <u>по-адекватно</u> са свързани със естеството и спецификата на съответната задача. Такива координати q_1, q_2 и q_3 могат да се въведат напр. посредством съотношенията

$$(1)\qquad \begin{cases} x = x(q_1, q_2, q_3) \\ y = y(q_1, q_2, q_3) \\ z = z(q_1, q_2, q_3) \end{cases}$$

Ако функциите (1) са избрани по такъв начин, че чрез тях се установява **еднозначно** и **обратимо съответствие** между декартовите координати x, y, z и величините q_1, q_2, q_3, то последните могат да бъдат разглеждани като <u>нови координати</u>, наречени **криволинейни координати**. Тогава радиус-векторът на произволна точка P с декартови координати x, y, z може да се представи във вида

$$(2)\qquad \vec{r} = x(q_1, q_2, q_3)\,\vec{i} + y(q_1, q_2, q_3)\,\vec{j} + z(q_1, q_2, q_3)\,\vec{k}, \text{ т.е. } \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3).$$

Посредством производните

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \dfrac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \dfrac{\partial y}{\partial q_1}\vec{j} + \dfrac{\partial z}{\partial q_1}\vec{k} \\[2ex] \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = \dfrac{\partial x}{\partial q_2}\vec{i} + \dfrac{\partial y}{\partial q_2}\vec{j} + \dfrac{\partial z}{\partial q_2}\vec{k}, \\[2ex] \dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = \dfrac{\partial x}{\partial q_3}\vec{i} + \dfrac{\partial y}{\partial q_3}\vec{j} + \dfrac{\partial z}{\partial q_3}\vec{k} \end{cases}$$

т.е.
$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{\partial x}{\partial q_m}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_m}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_m}\vec{k},$$

се дефинират **три линейно-независими вектора**, чиито **големини** са съответно

$$(4)\qquad \begin{cases} H_1 = \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} \\[2ex] H_2 = \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \\[2ex] H_3 = \left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\right| = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} \end{cases}$$

или съкратено

$$\boxed{H_i = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}}, \qquad i = 1,2,3.$$

Величините H_1, H_2 и H_3 се наричат **параметри на Ламе**. Ако всеки един от векторите (3) разделим на съответната му големина (4), получаваме тройка единични вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, образуващи **векторен базис** в новата криволинейна координатна система

(5) $$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}, \qquad \vec{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}, \qquad \vec{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}.$$

или в съкратен запис

$$\vec{e}_m = \frac{1}{H_m}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_m} = \frac{1}{H_m}\left(\frac{\partial x}{\partial q_m}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial q_m}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial q_m}\vec{k}\right).$$

Елемент от дъга ds в **декартова КС** се представя (*стандартно*) във вида

(6) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Нека вземем под внимание, че както следва от (1)

(7) $$\left|\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3 \\ dy &= \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3 \\ dz &= \frac{\partial x}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}dq_3 \end{aligned}\right. ,$$

и нека заместим (7) в (6), като отчетем, че при **ортогонални** криволинейни КС (*с каквито главно ще работим по-нататък*) е в сила т.нар. **условие за ортогоналност**. Съгласно това условие „смесени" членове от вида $dq_i dq_j$ не бива да фигурират в (6). Така получаваме, че

$$\left|\begin{aligned} dx^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 dq_1^{\,2} + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 dq_2^{\,2} + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2 dq_3^{\,2} \\ dy^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 dq_1^{\,2} + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 dq_2^{\,2} + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2 dq_3^{\,2} \\ dz^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 dq_1^{\,2} + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 dq_2^{\,2} + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2 dq_3^{\,2} \end{aligned}\right. ,$$

откъдето след събирането на горните равенства с отчитане на (4) и (6) следва

(8) $$ds^2 = H_1^2\, dq_1^{\,2} + H_2^2\, dq_2^{\,2} + H_3^2\, dq_3^{\,2}.$$

Ако (*формално*) представим ds в аналогична на (6) форма, отнасяща се обаче за „*криволинейната*" КС, ще имаме

(9) $$ds^2 = ds_1^{\,2} + ds_2^{\,2} + ds_3^{\,2}.$$

От сравняването на (8) и (9) се получава (*следва*), че

(10) $$ds_1 = H_1.dq_1, \qquad ds_2 = H_2.dq_2, \qquad ds_3 = H_3.dq_3,$$

или

(11) $$ds_i = H_i.dq_i,$$

откъдето следва **още едно представяне за коефициентите на Ламе**

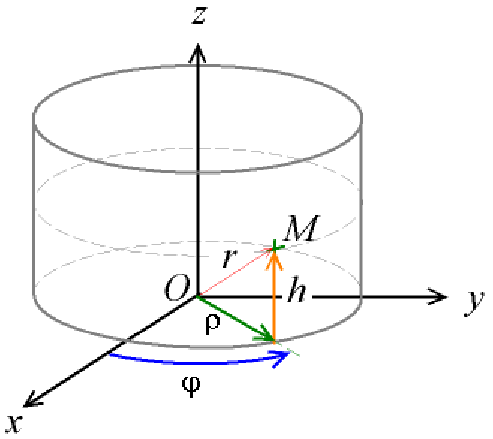
(12) $\boxed{H_i = \dfrac{ds_i}{dq_i}}$.

Елементарният обем в криволинейни координати ще бъде

(13) $\boxed{dV = ds_1.ds_2.ds_3 = H_1.H_2.H_3\, dq_1.dq_2.dq_3}$

☞ Нека разгледаме **две важни и широко използвани в ТМ криволинейни координатни системи**:

1. Цилиндрична координатна система



Връзката между декартови (x, y, z) и цилиндрични (ρ, φ, z) координати се дава със съотношенията

$$(14)\quad \left|\begin{array}{l} x = \rho.\cos\varphi \\ y = \rho.\sin\varphi\,, \\ z = z \end{array}\right. \qquad \text{или още}$$

$$(14')\quad \boxed{\vec{r} = \rho.\cos\varphi\,\vec{i} + \rho.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}}.$$

Нека в (4) и (5) положим $q_1 \to \rho$, $q_2 \to \varphi$, $q_3 \to z$:

$$\left|\begin{array}{l}
H_1 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} \equiv \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 0} = 1 \\
H_2 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{(-\rho\sin\varphi)^2 + (\rho\cos\varphi)^2} = \rho \\
H_3 = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} = \sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{0 + 0 + 1} = 1
\end{array}\right.$$

Така за параметрите на Ламе H_1, H_2, H_3 получаваме

$$(15)\quad \left|\begin{array}{l} H_1 = 1 \\ H_2 = \rho \\ H_3 = 1 \end{array}\right.$$

За базисните вектори $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, след диференциране на $\vec{r} = \rho.\cos\varphi\,\vec{i} + \rho.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ по $q_1 \equiv \rho$, $q_2 \equiv \varphi$, $q_3 \equiv z$ и с отчитане на (5) и (15) се получава:

$$(16)\quad \left|\begin{array}{l}
\vec{e}_1 \equiv \vec{e}_\rho = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \equiv \dfrac{1}{1}\dfrac{\partial}{\partial \rho}[\rho.\cos\varphi\,\vec{i} + \rho.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}] = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \\
\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_\varphi = \dfrac{1}{H_2}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \equiv \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \varphi}[\rho.\cos\varphi\,\vec{i} + \rho.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}] = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j} \\
\vec{e}_3 \equiv \vec{e}_z = \dfrac{1}{H_3}\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} \equiv \dfrac{1}{1}\dfrac{\partial}{\partial z}[\rho.\cos\varphi\,\vec{i} + \rho.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}] = \vec{k}
\end{array}\right.$$

От (16) непосредствено се вижда, че базисните вектори $\vec{e}_\rho$ и $\vec{e}_\varphi$ на цилиндричната координатна система са променливи (*по посока*) вектори, но третият базисен вектор $\vec{k} = co\vec{n}st$.

От (14) и (16) се получава следното представянето за радиус-вектора на точка M в цилиндрични координати:

(17) $\boxed{\vec{r} = \rho.\vec{e}_\rho + z\vec{k}}$.

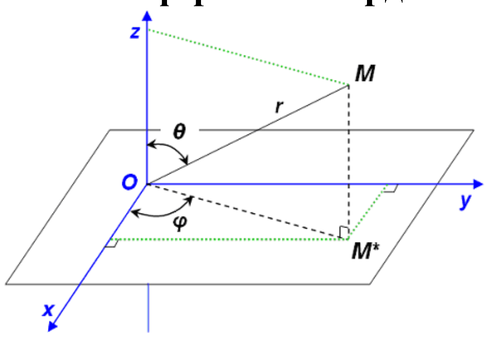
**Допълнение*: от (16) се вижда още, че матрицата на трансформация на координатите (*от декартови в цилиндрични*) има вида

$$M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

като очевидно $\det M = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$.

Забележка: <u>Полярната координатна система</u> може да се разглежда като **частен случай** на цилиндрична координатна система, за която $z = 0$.

2. Сферична координатна система



Връзката между декартови (x, y, z) и сферични (r, θ, φ) координати се дава със съотношенията

$$(18)\quad \left| \begin{aligned} x &= r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y &= r.\sin\theta.\sin\varphi, \\ z &= r.\cos\theta \end{aligned} \right.$$

като очевидно

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ и } tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

С помощта на (18) радиус-векторът на точка М в сферични координати може да се представи във вида

(19) $\vec{r} = r.\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + r.\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + r.\cos\theta\,\vec{k}$.

Ако в (4) положим $q_1 \to r,\ q_2 \to \theta,\ q_3 \to \varphi$, то параметрите на Ламе H_1, H_2, H_3 ще бъдат

☞ $$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} \equiv \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{(\sin\theta\cos\varphi)^2 + (\sin\theta\sin\varphi)^2 + (\cos\theta)^2} = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1;$$

☞ $$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{r^2(\cos\theta\cos\varphi)^2 + r^2(\cos\theta\sin\varphi)^2 + r^2(-\sin\theta)^2} = \sqrt{r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{r^2} = r;$$

☞ $H_3=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2}=$

$$=\sqrt{r^2[\sin\theta.(-\sin\varphi)]^2+r^2(\sin\theta\cos\varphi)^2+0}=\sqrt{r^2\sin^2\theta}=r.\sin\theta,$$

т.е.

$$(20)\quad \left|\begin{array}{l} H_1=1 \\ H_2=r \\ H_3=r.\sin\theta \end{array}\right. .$$

В декартови координати радиус-векторът се представя във вида $\vec{r}=r.\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+r.\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+r.\cos\theta\,\vec{k}$, но в сферични координати базисните вектори $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$, пресметнати по общата формула $\vec{e}_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}$ ще са

$$(21)\quad \left|\begin{array}{l} \vec{e}_1\equiv\vec{e}_r=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}=\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\theta\sin\varphi\,\vec{j}+\cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_2\equiv\vec{e}_\theta=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}=\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i}+\cos\theta\sin\varphi\,\vec{j}-\sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_3\equiv\vec{e}_\varphi=\frac{1}{H_3}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}=-\sin\varphi\,\vec{i}+\cos\varphi\,\vec{j} \end{array}\right.$$

От (21) непосредствено се вижда, че и трите базисни вектора $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ и $\vec{e}_\varphi$ на сферичната координатна система са **променливи** (*по посока*) **вектори**.

Лесно се установява (*да се покаже!*) още, че тези три единични вектора са **взаимно ортогонални**, т.е. напр. $\vec{e}_r.\vec{e}_\theta=0$, $\vec{e}_r.\vec{e}_\varphi=0$, $\vec{e}_\theta.\vec{e}_\varphi=0$, и т.н.

От (19) и (21) непосредствено следва представяне за **радиус-вектора** на точка M в сферични координати:

(22) $\boxed{\vec{r}=r.\vec{e}_r}$.

******Допълнение***: от (21) се вижда още, че матрицата на трансформация на координатите (*от декартови в сферични*) има вида

$$M=\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

като очевидно $\det M=1$.

Диференциални оператори в криволинейни координати:

Нека представим в криволинейни координати основните **диференциални оператори**: $grad\ \varphi$, $div\ \vec{A}$, $rot\ \vec{A}$ и $\Delta\varphi$.

А) Градиент: ако $\vec{A}=grad\ \varphi$, то съставящата $A_{q\,i}$ на градиента в криволинейни координати ще бъде

$$(23)\qquad A_{q\,i}=\frac{\partial\varphi}{\partial s_i}=\ldots.\ \text{заместваме } ds_i=H_i.dq_i \text{ от (11)}\ \ldots=\frac{\partial\varphi}{H_i\partial q_i},$$

като по повтарящия се индекс i се подразбира сумиране, следователно

$$(24)\qquad grad\ \varphi=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\vec{e}_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\vec{e}_2+\frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\vec{e}_3.$$

Б) Дивергенция:

Доказва се, че

$$(25)\qquad div\ \vec{A}=\frac{1}{H_1.H_2.H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2.H_3A_{q\,1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1.H_3A_{q\,2})+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1.H_2A_{q\,3})\right].$$

В) Ротация:

Доказва се, че

$$(26)\qquad rot\ \vec{A}=\frac{1}{H_1.H_2.H_3}\begin{vmatrix} H_1\vec{e}_1 & H_2\vec{e}_2 & H_3\vec{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3}\\ H_1A_{q\,1} & H_2A_{q\,2} & H_3A_{q\,3}\end{vmatrix}$$

Г) Оператор на Лаплас (*от* *<u>скаларно</u>* *поле*)**:**

$$(27)\qquad \Delta\varphi=div\ grad\ \varphi=div\ \{grad\ \varphi\}\equiv div\ \vec{A},$$

където

$$(28)\qquad \vec{A}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\vec{e}_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\vec{e}_2+\frac{1}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\vec{e}_3,\quad \text{т.е.}\quad A_{q\,i}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i},$$

следователно

$$(29)\qquad \Delta\varphi=div\ \vec{A}=\frac{1}{H_1.H_2.H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2.H_3A_{q\,1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1.H_3A_{q\,2})+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1.H_2A_{q\,3})\right]=$$

$$=\frac{1}{H_1.H_2.H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{H_2.H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{H_1.H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2})+\frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{H_1.H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3})\right].$$

И така

$$(30)\qquad \boxed{\Delta\varphi=\frac{1}{H_1.H_2.H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(\frac{H_2.H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1})+\frac{\partial}{\partial q_2}(\frac{H_1.H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2})+\frac{\partial}{\partial q_3}(\frac{H_1.H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3})\right]}.$$

✸ Задача 1.1

Да се определят законите за скоростта и ускорението в цилиндрични координати. Чрез получените формули да се изрази (*в цилиндрични координати*) кинетичната енергия T на материална точка с маса m.

Решение: за определяне закона за скоростта в цилиндрични координати е достатъчно да се диференцира по времето радиус-вектора $\vec{r}=\rho.\vec{e}_\rho+z\vec{k}$:

$$(1)\qquad \vec{v}=\dot{\vec{r}}\equiv\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\rho}.\vec{e}_\rho+\rho.\dot{\vec{e}}_\rho+\dot{z}\vec{k}+z\dot{\vec{k}}\equiv\dot{\rho}.\vec{e}_\rho+\rho.\dot{\vec{e}}_\rho+\dot{z}\vec{k}.$$

Понеже съгласно (16) от теоретичната част

$$\dot{\vec{e}}_\rho=\frac{d}{dt}[\cos\varphi\ \vec{i}+\sin\varphi\ \vec{j}]=-\sin\varphi\dot{\varphi}\vec{i}+\cos\varphi\dot{\varphi}\ \vec{j}\equiv\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,$$

то за скоростта в цилиндрични координати получаваме

(2) $\vec{v} = \dot{\rho}.\vec{e}_\rho + \rho.\dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z}\,\vec{k} = \dot{\rho}.\vec{e}_\rho + \rho.\dot{\varphi}\;\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}$,

или по компоненти

(3) $\vec{v} = v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z$, където

(4) $v_\rho = \dot{\rho}, \qquad v_\varphi = \rho.\dot{\varphi}, \qquad v_z = \dot{z}$.

Очевидно **кинетичната енергия** T на материална точка с маса m може да бъде представена в цилиндрични координати посредством равенството

(5) $\boxed{T = \frac{m}{2}(v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2) = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2)}$,

а големината на скоростта е

(6) $v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}$.

Чрез диференциране по времето на закона за скоростта (3) може да бъде получен и законът за ускорението в цилиндрични координати

(7) $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v_\rho \vec{e}_\rho + v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_z \vec{e}_z] = \dot{v}_\rho \vec{e}_\rho + v_\rho \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{v}_\varphi \vec{e}_\varphi + v_\varphi \dot{\vec{e}}_\varphi + \dot{v}_z \vec{e}_z + v_z \dot{\vec{e}}_z =$

$= \dot{v}_\rho \vec{e}_\rho + v_\rho\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{v}_\varphi \vec{e}_\varphi + v_\varphi(-\dot{\varphi}\vec{e}_\rho) + \dot{v}_z \vec{e}_z = (\dot{v}_\rho - v_\varphi\,\dot{\varphi})\vec{e}_\rho + (v_\rho\,\dot{\varphi} + \dot{v}_\varphi)\vec{e}_\varphi + \dot{v}_z \vec{e}_z$,

където е отчетено, че съгласно (16) от уводната част:

(8) $\dot{\vec{e}}_\rho = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \qquad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho \qquad$ и $\qquad \dot{\vec{e}}_z = 0$.

Така получаваме

(9) $\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z$,

където отчитайки, че $v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho.\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}$, ще имаме още

($10^А$) $a_\rho = \dot{v}_\rho - v_\varphi\,\dot{\varphi}$, т.е. $a_\rho = \ddot{\rho} - (\rho\dot{\varphi})\dot{\varphi} = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2$.

($10^Б$) $a_\varphi = v_\rho\,\dot{\varphi} + \dot{v}_\varphi$, т.е. $a_\varphi = \dot{\rho}\dot{\varphi} + \frac{d}{dt}(\rho\dot{\varphi}) = \dot{\rho}\dot{\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}$

($10^В$) $a_z = \dot{v}_z$, т.е. $a_z = \ddot{z}$

Окончателно

(10) $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$.

**Допълнение*: лесно може да се установи (*провери*), че

(11) $a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} \equiv \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\varphi})$.

Ако се вземе под внимание, че при движение в една равнина (*напр. движение в централно-симетрично поле*) елементарната площ в полярни координати (*т.е. при* $z = 0$), описана за време dt е

(12) $dS = \frac{1}{2}\rho(\rho.d\varphi) \equiv \frac{1}{2}\rho(\rho.\frac{d\varphi}{dt})dt = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}\,dt$,

то площната скорост (*площта, описвана от радиус-вектора на движещия се обект за единица време*) ще бъде

(13) $\sigma = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\dot{\varphi}$.

С отчитане на (13) формулата (11) за φ-тата (*ъгловата*) компонента на ускорението ще добие вида

(14) $a_\varphi = \dfrac{2}{\rho}\dfrac{d\sigma}{dt}$.

*Допълнение: лесно се установява (*да се покаже*), че

(15) $\left|\begin{array}{l} \vec{i} = \cos\varphi\ \vec{e}_\rho - \sin\varphi\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{j} = \sin\varphi\ \vec{e}_\rho + \cos\varphi\ \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} = \vec{e} \end{array}\right.$.

✸ Задача 1.2

Да се определят законите за скоростта и ускорението в сферични координати. Чрез получените формули да се изрази (*в сферични координати*) кинетичната енергия T на материална точка с маса m.

Решение: за определяне закона за скоростта в сферични координати е достатъчно да се диференцира по времето радиус-вектора $\vec{r} = r.\vec{e}_r$

(1) $\vec{v} = \dot{\vec{r}} \equiv \dfrac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\vec{e}}_r$.

Тук следва да отчетем, че тъй като в сферични координати единичните вектори са

(2) $\left|\begin{array}{l} \vec{e}_r = \sin\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\ \vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\ \vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\ \vec{i} + \cos\varphi\ \vec{j} \end{array}\right.$,

то

$$\dot{\vec{e}}_r = (\cos\theta\dot{\theta})\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta(-\sin\varphi\dot{\varphi})\,\vec{i} + (\cos\theta\dot{\theta})\sin\varphi\,\vec{i} + \sin\theta(\cos\varphi\dot{\varphi})\,\vec{i} + (-\sin\theta\dot{\theta})\vec{k} =$$

$= \dot{\theta}[\cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\vec{k}] + \sin\theta[-\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}]\dot{\varphi}$, т.е.

($3^А$) $\boxed{\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$.

Аналогично

$$\dot{\vec{e}}_\theta = (-\sin\theta\dot{\theta})\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta(-\sin\varphi\dot{\varphi})\vec{i} + (-\sin\theta\dot{\theta})\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta(\cos\varphi\dot{\varphi})\,\vec{j} - (\cos\theta\dot{\theta})\vec{k} =$$

$= -\dot{\theta}[\sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\vec{k}] + \cos\theta[-\sin\varphi\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}]\dot{\varphi}$, т.е.

($3^Б$) $\boxed{\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \cos\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$.

Накрая

(*) $\dot{\vec{e}}_\varphi = -(\cos\varphi\dot{\varphi})\vec{i} + (-\sin\varphi\dot{\varphi})\,\vec{j} \equiv -[\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}]\dot{\varphi}$.

Забелязваме, че ако умножим първото от равенствата (2) с $\sin\theta$, а второто с $\cos\theta$, след което ги съберем, ще получим

$$\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta = \sin^2\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin^2\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \sin\theta\cos\theta\vec{k} +$$
$$+\cos^2\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos^2\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\cos\theta\vec{k} = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}.$$

Замествайки така намереното представяне за $\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$ в (*), получаваме

($3^В$) $\dot{\vec{e}}_\varphi = -[\cos\varphi\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}]\dot{\varphi} = -[\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta]\dot{\varphi}$.

С отчитането на ($3^А$) в (1) за скоростта в сферични координати получаваме

(4) $\quad \vec{v} = \dot{r}.\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\ \vec{e}_\varphi,$

или по компоненти

(5) $\quad \vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta + v_\varphi\vec{e}_\varphi,$ където

(6) $\quad v_r = \dot{r}, \qquad v_\theta = r.\dot{\theta}, \qquad v_\varphi = r.\sin\theta\,\dot{\varphi}$

Кинетичната енергия T на материална точка с маса m може да бъде представена в сферични координати посредством равенството

(7) $$\boxed{T = \frac{m}{2}(v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta.\dot{\varphi}^2)},$$

а големината на скоростта е

(8) $$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta.\dot{\varphi}^2}\ .$$

Чрез диференциране по времето на закона за скоростта (4) може да бъде получен и законът за **ускорението** в сферични координати

(9) $$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}.\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\ \vec{e}_\varphi) =$$

$$= \ddot{r}.\vec{e}_r + \dot{r}.\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\ \vec{e}_\varphi + r\ddot{\varphi}\sin\theta\ \vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\cos\theta\dot{\theta}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\ \dot{\vec{e}}_\varphi\ .$$

След коректно заместване в (9) на намерените вече в ($3^А$, $3^Б$, $3^В$) производни на единичните вектори, се получава

$$\vec{a} = \ddot{r}.\vec{e}_r + \dot{r}\ (\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e}_r + \cos\theta\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\ \vec{e}_\varphi +$$

$$+ r\ddot{\varphi}\sin\theta\ \vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\cos\theta\dot{\theta}\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\sin\theta\ (-\sin\theta\vec{e}_r - \cos\theta\vec{e}_\theta)\dot{\varphi} =$$

$$= \{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\}\vec{e}_r + \{r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\}\vec{e}_\theta +$$

$$+ \{\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + \dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\}\vec{e}_\varphi\ .$$

След направените приведения и групирания се обособяват следните представяния за компонентите на вектора на ускорението в сферични координати:

($10^А$) $\quad \vec{a}_r = \{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\}\vec{e}_r\,,$

т.е $\quad \boxed{a_r = \ddot{r} - r[\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2\sin^2\theta]};$

($10^Б$) $\quad \vec{a}_\theta = \{r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}\dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\}\vec{e}_\theta\,,$

т.е $\quad \boxed{a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta};$

($10^В$) $\quad \vec{a}_\varphi = \{2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\}\vec{e}_\varphi\,,$

т.е $\quad \boxed{a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta}.$

*Допълнение: лесно може да се покаже (*докаже*), че

(11) $$\left|\begin{aligned} &\vec{i} = \sin\theta\cos\varphi\vec{e}_r + \cos\theta\cos\varphi\ \vec{e}_\theta - \sin\varphi\vec{e}_\varphi \\ &\vec{j} = \sin\theta\sin\varphi\ \vec{e}_r + \cos\theta\sin\varphi\vec{e}_\theta + \cos\varphi\vec{e}_\varphi\ . \\ &\vec{k} = -\cos\theta\ \vec{e}_r - \sin\theta\ \vec{e}_\theta \end{aligned}\right.$$

✷ Задача 1.3

Да се изрази Лапласов оператор $\Delta\varphi$, приложен над скаларна функция с векторен аргумент

а) в цилиндрични (*полярни*) координати,

б) в сферични координати.

Решение:

а) за цилиндрични координати съгласно (30) от теоретичната част, отчитайки че $H_1 = 1$, $H_2 = \rho$ и $H_3 = 1$, имаме

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1.H_2.H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2.H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1.H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1.H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{1.\rho.1}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\rho.1}{1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1.1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1.\rho}{1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right], \text{ т.е.}$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi}\right) + \left(\frac{\partial}{\partial z}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right],$$

или

(1) $$\Delta\varphi = \frac{1}{\rho}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\varphi^2} + \rho\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right].$$

В цилиндрични координати $dV = H_1.H_2.H_3\, dq_1.dq_2.dq_3 = \rho\, d\rho.d\varphi.dz$.

б) за сферични координати пак съгласно (30) от теоретичната част, при $H_1 = 1$, $H_2 = r$ и $H_3 = r.\sin\theta$, ще имаме

$$\Delta\varphi = \frac{1}{H_1.H_2.H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2.H_3}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1.H_3}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1.H_2}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{r^2.\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{r^2.\sin\theta}{1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{r.\sin\theta}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{r}{r.\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\right)\right], \text{ т.е.}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\sin\theta}{r^2.\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2.\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2.\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi},$$

с което всъщност доказахме, че в сферични координати операторът на Лаплас е

(2) $$\Delta = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right].$$

Очевидно, представен по този начин, операторът на Лаплас може да се запише още във вида

(3) $$\Delta = \Delta_r + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi},$$

където

(4.1) $$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)$$ (*радиална част на оператора*), и

(4.2) $$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$ (*„ъглова" част на оператора*).

В сферични координати ($H_1 = 1$, $H_2 = r$ и $H_3 = r.\sin\theta$)

(5) $$dV = H_1.H_2.H_3\, dq_1.dq_2.dq_3 = r^2\sin\theta\, dr.d\theta.d\varphi.$$

📖

Тема 2: Движение спрямо неинерциална отправна система (НИОС)

Теоретичен минимум: Законите на механиката са валидни в инерциални отправни системи. Отправни системи, движещи се ускорително спрямо инерциална отправна система, се наричат *неинерциални*. За да са валидни законите на динамиката и за неинерциалните отправни системи, освен силите, обусловени от взаимодействията между телата, е необходимо въвеждането на особен вид сили – *инерчни сили*. С отчитане на инерчните сили вторият принцип на механиката става валиден за **произволна отправна система**. При това инерчните сили $\vec{F}_i$ трябва да бъдат такава, че заедно със силите, обусловени от взаимодействията между телата, да създават на тялото ускорение $\vec{a}'$, каквото то реално притежава в неинерциалната отправна система

(1) $m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_i$.

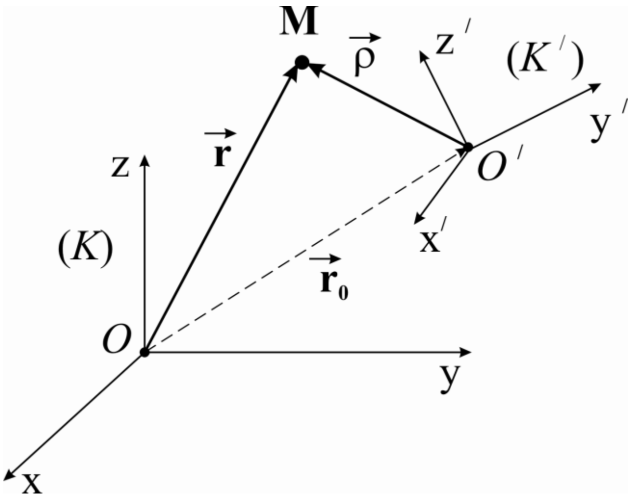
Тъй като $\vec{F} = m\vec{a}$, където $\vec{a}$ е ускорението на тялото в инерциална отправна система, то ускорението $\vec{a}'$ в неинерциална система ще бъде

(2) $m\vec{a}' = m\vec{a} + \vec{F}_i$

Инерчните сили са обусловени от ускорителното движение (*постъпателно или въртеливо*) на неинерциална система и затова могат да бъдат разгледани следните случаи на такива сили:

а) инерчна сила при ускорително постъпателно движение на отправната система;

б) инерчна сила, действаща на тяло, което се намира в покой или се движи спрямо въртяща се неинерциална отправна система.



✸ Задача 2.1

Да се определят законите за трансформация на координатите, скоростите и ускоренията при движение спрямо НИОС. Да се получи най-общ израз (*представяне*) за инерчните сили, действащи върху тяло в НИОС.

Решение: Ако с $\vec{r}$ и $\vec{\rho}$ обозначим радиус-векторите на материална точка М спрямо координатните системи (K) и (K') съответно, то уравнението (*трансформационен закон*), което ги свързва, има вида

(1) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$.

За определянето на трансформационния закон за скоростта на т. М е необходимо да се диференцира по времето трансформационния закон (1) за координатите

(2) $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

При това следва да се има предвид, че тъй като (K) е ИОС, то нейните единични вектори $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ са константни, следователно

(3) $$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} = \vec{V}_a,$$

където с $\vec{V}_a$ е означена т.нар. **абсолютна скорост**.

Координатната система $(K^/)$ обаче е неинерциална, което означава, че тя участва в постъпателно-въртеливо (*в общия случай*) движение относно (K), следователно нейните единични вектори $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ са (*в общия случай*) запазващи големината си, но не и посоката си вектори, поради което те се изменят с времето. Ето защо при определянето на производната на радиус-вектора $\vec{\rho}(\xi_x\,\vec{e}_x + \xi_y\,\vec{e}_y + \xi_z\,\vec{e}_z)$ следва да диференцираме не само координатите ξ_x, ξ_y, ξ_z, но и самите променящи се с времето единични вектори $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, т.е.

(4) $$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d}{dt}(\xi_x\,\vec{e}_x + \xi_y\,\vec{e}_y + \xi_z\,\vec{e}_z) = (\dot{\xi}_x\,\vec{e}_x + \dot{\xi}_y\,\vec{e}_y + \dot{\xi}_z\,\vec{e}_z) + (\xi_x\,\dot{\vec{e}}_x + \xi_y\,\dot{\vec{e}}_y + \xi_z\,\dot{\vec{e}}_z).$$

Величината

(5) $$\vec{V}_r = \dot{\xi}_x\,\vec{e}_x + \dot{\xi}_y\,\vec{e}_y + \dot{\xi}_z\,\vec{e}_z,$$

стояща в дясната страна на (4), изразява скоростта на материалната точка спрямо НИКС $(K^/)$, и се нарича **релативна скорост**.

За намиране участващите в (4) производни по времето на единичните вектори на НИОС $(K^/)$ използваме факта, че ако осите на тази КС се въртят с ъглова скорост $\vec{\omega}$ в пространството по отношение на тези в КС (K), то производните на единичните ѝ вектори се дават с лесно доказуемите съотношения

(6) $$\dot{\vec{e}}_x = \vec{\omega}\times\vec{e}_x, \qquad \dot{\vec{e}}_y = \vec{\omega}\times\vec{e}_y \qquad \text{и} \qquad \dot{\vec{e}}_z = \vec{\omega}\times\vec{e}_z,$$

откъдето следва, че

(7) $$\xi_x\,\dot{\vec{e}}_x + \xi_y\,\dot{\vec{e}}_y + \xi_z\,\dot{\vec{e}}_z = \xi_x\,(\vec{\omega}\times\vec{e}_x) + \xi_y\,(\vec{\omega}\times\vec{e}_y) + \xi_z\,(\vec{\omega}\times\vec{e}_z) =$$
$$= \vec{\omega}\times(\xi_x\,\vec{e}_x + \xi_y\,\vec{e}_y + \xi_z\,\vec{e}_z) \equiv \vec{\omega}\times\vec{\rho}.$$

С отчитането на (5) и (7) в (4) получаваме

(8) $$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = (\dot{\xi}_x\,\vec{e}_x + \dot{\xi}_y\,\vec{e}_y + \dot{\xi}_z\,\vec{e}_z) + (\xi_x\,\dot{\vec{e}}_x + \xi_y\,\dot{\vec{e}}_y + \xi_z\,\dot{\vec{e}}_z) = \vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{\rho}.$$

След заместването на производните (3) и (8) в (2), за закона за скоростта получаваме

(9) $$\vec{V}_a = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{\rho} = \vec{V}_r + \left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}\right) \equiv \vec{V}_r + \vec{V}_e, \text{ т.е.}$$

(10) $$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

където с

(11) $$\vec{V}_e = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}$$

е означена т.нар. **относителна скорост**. Както лесно се съобразява посредством члена $\dfrac{d\vec{r}_0}{dt}$ се описва скоростта на чисто постъпателното движение на $(K^/)$ спрямо (K), докато членът $(\vec{\omega}\times\vec{\rho})$ отчита скоростта на чисто въртеливото движение.

За да намерим трансформационния закон за ускоренията, диференцираме законът за скоростите (10)

(12) $\dfrac{d\vec{V}_a}{dt} = \dfrac{d\vec{V}_r}{dt} + \dfrac{d\vec{V}_e}{dt}$.

Величината

(13) $\vec{a}_a = \dfrac{d\vec{V}_a}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}}$

се нарича **абсолютно ускорение**, т.е. ускорение спрямо ИОС (K).

Производната на релативната скорост $\vec{V}_r = \dot{\xi}_x \vec{e}_x + \dot{\xi}_y \vec{e}_y + \dot{\xi}_z \vec{e}_z$ е

(14) $$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\xi}_x \vec{e}_x + \dot{\xi}_y \vec{e}_y + \dot{\xi}_z \vec{e}_z) = (\ddot{\xi}_x \vec{e}_x + \ddot{\xi}_y \vec{e}_y + \ddot{\xi}_z \vec{e}_z) + (\dot{\xi}_x \dot{\vec{e}}_x + \dot{\xi}_y \dot{\vec{e}}_y + \dot{\xi}_z \dot{\vec{e}}_z) =$$
$$= \vec{a}_r + \{\dot{\xi}_x (\vec{\omega}\times\vec{e}_x) + \dot{\xi}_y (\vec{\omega}\times\vec{e}_x) + \dot{\xi}_z (\vec{\omega}\times\vec{e}_x)\} = \vec{a}_r + \vec{\omega}\times(\dot{\xi}_x \vec{e}_x + \dot{\xi}_y \vec{e}_x + \dot{\xi}_z \vec{e}_x) =$$
$$= \vec{a}_r + \vec{\omega}\times\vec{V}_r,$$

където с

(15) $\vec{a}_r = \ddot{\xi}_x \vec{e}_x + \ddot{\xi}_y \vec{e}_y + \ddot{\xi}_z \vec{e}_z \equiv \ddot{\vec{\rho}}\,(K^{/})$

е обозначено **релативното ускорение**, т.е. ускорението спрямо НИОС $(K^{/})$.

Следва да определим и производната

(16) $$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_0}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{\rho}\right) = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{\rho}) = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{\rho}}{dt}.$$

Ако в най-последния член в (16) заместим производната $\dfrac{d\vec{\rho}}{dt}$ с нейното представяне, получено вече в (8), ще имаме

(17) $$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times(\vec{V}_r + \vec{\omega}\times\vec{\rho}) = \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \vec{\omega}\times\vec{V}_r + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho}.$$

Накрая заместваме намерените дотук производни (13, (14) и (17) в (12), и получаваме

(18) $$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{\omega}\times\vec{V}_r + \frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \vec{\omega}\times\vec{V}_r + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho} =$$
$$= \vec{a}_r + \left(\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho}\right) + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c,$$

където с

(19) $\vec{a}_e = \dfrac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho} + \vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho}$

е обозначено **относителното ускорение** на $(K^{/})$ спрямо (K), а с

(20) $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{V}_r$

е обозначено т.нар. **кориолисово ускорение**, каквото притежава всяко тяло, движещо се с някаква (*различна от нула*) скорост $\vec{V}_r$ спрямо въртяща се с ъглова скорост $\vec{\omega}$ НИОС.

И така в най-общия случай законът за ускорението добива вида

(21) $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$.

С помощта на (21) може да бъде получено и основното уравнение на динамиката за неинерциални отправни системи. За целта нека представим (21) във вида

(22) $\vec{a}_r = \vec{a}_a - \vec{a}_e - \vec{a}_c$,

след което нека умножим двете страни на полученото равенство с масата m

(23) $m\vec{a}_r = m\vec{a}_a - m\vec{a}_e - m\vec{a}_c$.

Записано в този вид, това равенство изразява силата $m\vec{a}_r$, действаща върху тялото M в НИОС $(K^{/})$ чрез три други сили:

☞ силата $m\vec{a}_a$, представляваща векторната сума $\vec{F}$ от всички „**реални**" сили, действащи върху тялото М;

☞ силата $\vec{F}_c = -m\vec{a}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{V}_r$, наречена сила на Кориолис;

☞ силата $\vec{F}_e = -m\vec{a}_e = -m\dfrac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} - m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho}) - m(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho})$, наречена преносна (*относителна*) инерчна сила.

С дефинирането и въвеждането на тези сили основното уравнение на динамиката за НИОС добива вида

(24) $\vec{F}_r = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \equiv \vec{F} + \sum \vec{F}_{in}$,

където инерчните сили могат да бъдат:

✓ кориолисова сила $\vec{F}_c = -2m\vec{\omega}\times\vec{V}_r$, дължаща се на движението на тела спрямо въртящи се НИОС;

✓ инерчна сила $-m\dfrac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} \equiv -m\ddot{\vec{r}}_0 = -m\vec{a}_0$, дължаща се на „чисто" постъпателно ускорително движение на $(K^{/})$ относно (K) с линейно ускорение $\vec{a}_0$;

✓ инерчна сила $-m(\dot{\vec{\omega}}\times\vec{\rho})$, дължаща се на „чисто" въртеливо ускорително движение на $(K^{/})$ относно (K) с ъглово ускорение $\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}}$; и

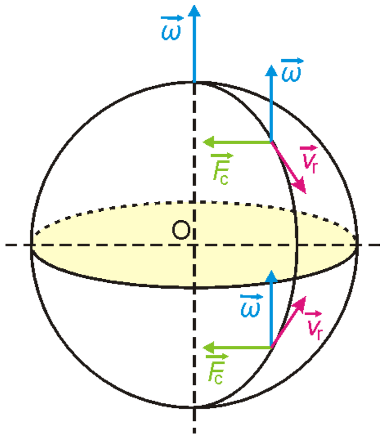
✓ центробежна сила $\vec{F}_{цб} = -m(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho})$, действаща дори на тела, неподвижни спрямо въртяща се НИОС. С помощта на формула за двойно векторно произведение тази сила може да бъде представена във вида

(25) $\vec{F}_{цб} = -m(\vec{\omega}\times\vec{\omega}\times\vec{\rho}) = -m[\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{\rho})] = -m[(\vec{\omega}.\vec{\rho})\vec{\omega} - (\vec{\omega}.\vec{\omega})\vec{\rho}]$.

Понеже $\vec{\omega}\perp\vec{\rho}$, то $\vec{\omega}.\vec{\rho}\equiv 0$, откъдето следва, че

(26) $\vec{F}_{цб} = -m[-(\vec{\omega}.\vec{\omega})\vec{\rho}] = m\omega^2\vec{\rho}$.

Очевидно центробежната инерчна сила, въпреки привидното сходство в аналитичното й представяне с центростремителната сила $\vec{F}_{цс} = -m\omega^2\vec{\rho}$, се различава коренно от нея както по посока, така и по своята физическа природа: докато „реалните" сили са сили на **ВЗАИМОдействие** между **ДВЕ** тела, то инерчните сили са сили, **действащи върху едно единствено тяло** (*т.е. липсва второ тяло, което да му действа*).



Илюстрация към „сила на Кориолис”

**Забележка*: центробежната сила, която по своята природа е инерчна сила, проявяваща се „мистериозно” само в НИОС, но отсъстваща в ИОС, не бива да се бърка с центростремителната сила $\vec{F}_ц = m\omega^2\vec{\rho}$, явяваща се „реална” физическа сила, действаща в ИОС, и заставяща телата да се движат по криви (*окръжност*) напр.

📖

Тема 3: Функция на Лагранж. Уравнения на Лагранж от II род

Теоретичен минимум: В много случаи на движението на една система има наложени ограничения, наречени **връзки**. Такава система се нарича несвободна. Самите ограничения могат да се изразят с **алгебрични уравнения**, свързващи радиус-векторите на точките от системата и времето, в т.нар. уравнения на връзките

$$f_\alpha(\vec{r},t)=0, \qquad \alpha = 1,2,...,\kappa,$$

където κ е **броят на връзките**.

Уравненията на (*за*) връзките могат да съдържат и скоростите на материалните точки.

Ако уравненията на връзките могат да се сведат до вид, несъдържащ скоростите, такива връзки се наричат **холономни** (*или интегрируеми*).

А ако това е невъзможно, то връзките се наричат **нехолономни** (*или неинтегрируеми*).

Връзките се разделят и на:

- **удържащи** - задават се с равенства, и
- **неудържащи** - задават се с неравенства.

Връзките се делят още на:

- **стационарни** (*или склерономни*) - уравненията на връзките **не съдържат** явна зависимост от времето, и
- **нестационарни** (*или реономни*) - уравненията на връзките **съдържат** явна зависимост от времето.

Система от N частици, на която са наложени κ на брой връзки, има $s = 3N - k$ на брой **степени на свобода**.

Система, на която **не са наложени връзки**, се нарича **свободна**. За нея броят на степените на свобода е $s = 3N$.

📖 Важни базисни предпоставки и съображения при определяне **степените на свобода** на прости механични системи:

☞ материална точка (*тяло*), движеща се **по права** (*а в по-общ случай – по крива L в пространството*), притежава $s=1$ степен на свобода, т.е. наложени са й $k=2$ връзки;

☞ материална точка (*тяло*), движеща се **в равнина** (*а в по-общ случай – по повърхност S в пространството*), притежава $s=2$ степен на свобода, т.е. наложена й е $k=1$ връзка (*ограничението е да не напуска равнината*);

☞ материална точка (*тяло*), движеща се **свободно** в тримерното пространство, притежава $s=3$ степен на свобода, т.е. тя е обект, върху движението на който не са наложени никакви ограничения (*респективно връзки*).

За система от N частици, които (*за определеност, напр.*) не са съставна част на твърдо тяло, най-напред се определя броя на наложените връзки. Този анализ може да се проведе, като се използват изложените по-горе съображения, визиращи частиците поотделно, както и някои специфични за конкретната задача съображения, касаещи ограничения, наложени върху произволни комбинации от по 2, 3 и повече частици (*напр. ограничение, породено от изискване разстоянието между две частици да се запазва винаги постоянно, и др.*). Накрая броят на **степените на свобода** на системата от частици се изразява по общата формула $s=3N-k$.

На всяка механична система с s степени на свобода се съпоставя функция на **обобщените координати** $q_i(t)$ и нейните производни (*обобщените скорости*) $\dot{q}_i(t)$, наречена **функция на Лагранж**

(Ф.1) $$L=L(q_1(t),q_2(t),....,q_s(t);\dot{q}_1(t),\dot{q}_2(t),...,\dot{q}_s(t);t), \qquad i=1,2,....,s$$

С помощта на функцията на Лагранж L се дефинира **величината**

(Ф.2) $$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t),\dot{q}_i(t),t)\,dt$$

наречена **действие**. Интегралът (Ф.2) представлява **функционал**, т.е. математически обект, чрез който на една или няколко функции от някаква съвкупност (*пространство*) се съпоставя определено **число**.

Уравнения на Лагранж:

(Ф.3) $$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0 \quad \text{за} \quad i=1,2,....,s.$$

Величините

(Ф.4) $$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i=1,2,....,s$$

се наричат **обобщени импулси**. В рамките на лагранжевия формализъм обобщените импулси нямат статута на независими променливи.

Функция на Лагранж за частица в поле $U(r)$:

а) в **декартови координати**: $L\equiv T-U=\dfrac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-U(r)$;

б) в **цилиндрични координати**: $L=\dfrac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\varphi}^2+\dot{z}^2)-U(r)$;

в) в **сферични координати**: $L=\dfrac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta.\dot{\varphi}^2)-U(r)$.

Ако частицата е **свободна**, то (*по подразбиране*) $U(x,y,z)=0$.

✸ **Задача 3.1**

Да се намерят уравненията на Лагранж за материална точка (*частица*), движеща се под действие на потенциал $U(x,y,z)$ (*в декартови координати*).

Решение: трите декартови координати на частицата разглеждаме като нейни **обобщени координати**. При отсъствието на връзки частицата има **3 степени на свобода**. Лагранжианът на частицата е

(1) $$L = T - U = \frac{m}{2}V^2 - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z).$$

Трите уравнения на Лагранж са съответно:

($2^А$) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$, т.е. $\dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) + \dfrac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$;

($2^Б$) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0$, т.е. $\dfrac{d}{dt}(m\dot{y}) + \dfrac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{y} = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$;

($2^В$) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0$, т.е. $\dfrac{d}{dt}(m\dot{z}) + \dfrac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{z} = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$.

Като се вземе под внимание, че

(3) $\vec{F} = -gradU$, т.е. $F_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x}$, $F_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y}$ и $F_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$,

лесно се установява, че уравненията на Лагранж ($2^{А,Б,В}$) представляват покомпонентен запис на втория закон на Нютон $m\vec{a} = \vec{F}$.

✸ **Задача 3.2 (**Стр. 26/Зад. 158[А,Б]**)**

Да се напишат уравненията на Лагранж за система, чиято функция на Лагранж е:

а) $L(q,\dot{q}) = e^{-q^2-\dot{q}^2} + 2\dot{q}e^{-q^2}\int\limits_0^{\dot{q}} e^{-x^2}dx$;

б) $L(q,\dot{q},t) = \dfrac{1}{2}e^{\alpha t}(\dot{q}^2 - \omega^2 q^2)$.

Решение:

а) при даден по условие лагранжиан (*функция на Лагранж*)

(1) $$L(q,\dot{q}) = e^{-q^2-\dot{q}^2} + 2\dot{q}e^{-q^2}\int\limits_0^{\dot{q}} e^{-x^2}dx,$$

където q е обобщена координата, то уравнението на Лагранж за системата, описвана с горната функция на Лагранж, ще има вида

(2) $$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.$$

За неговото получаване в явен вид е удобно най-напред да „подготвим” производните:

$$\frac{\partial L}{\partial q} = e^{-q^2-\dot{q}^2}(-2q) + 2\dot{q}e^{-q^2}(-2q)\int\limits_0^{\dot{q}} e^{-x^2}dx$$ (*диференцира се само по* q *!!*), т.е.

($3^А$) $$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} = -2q\,e^{-q^2-\dot{q}^2} - 4q\dot{q}e^{-q^2}\int\limits_0^{\dot{q}} e^{-x^2}dx}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q} = e^{-q^2-\dot q^2}(-2\dot q) + 2e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-x^2}dx + 2\dot q\, e^{-q^2} + 2e^{-q^2}\frac{\partial}{\partial \dot q}\left(\int_0^{\dot q} e^{-x^2}dx\right) =$$

$$= -2\dot q\, e^{-q^2-\dot q^2} + 2e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-x^2}dx + 2\dot q\, e^{-q^2}\{e^{-\dot q^2}\} \equiv 2e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-x^2}dx \text{, т.е.}$$

(3[Б]) $$\frac{\partial L}{\partial \dot q} = 2e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-x^2}dx\,,$$

където е диференцирано само по $\dot q$ (!!), и е използвано още, че ако един определен интеграл е функция на горната си граница (*разглеждана като параметър*), то производната на този интеграл по този параметър е равна на примитивната му функция, т.е.

(*) $$\frac{d}{d\xi}\int_0^{\xi} F(\tau)\,d\tau = F(\xi)\,.$$

Накрая остана да определим производната по времето от (3[Б]), т.е.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{d}{dt}\left(2e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-x^2}dx\right) = \frac{d}{dt}\left(2e^{-q^2}\right)\int_0^{\dot q} e^{-x^2}dx + 2e^{-q^2}\frac{d}{d\dot q}\left(\int_0^{\dot q} e^{-x^2}dx\right)\frac{d\dot q}{dt} =$$

$$= 2e^{-q^2}(-2q\dot q)\int_0^{\dot q} e^{-x^2}dx + 2e^{-q^2}e^{-\dot q^2}\ddot q = 2e^{-q^2-\dot q^2}\ddot q - 4q\dot q e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-x^2} \text{, т.е.}$$

(3[В]) $$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = 2e^{-q^2-\dot q^2}\ddot q - 4q\dot q e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-x^2}}\,.$$

Накрая заместваме (3[А]) и (3[В]) в (2), с което получаваме уравнението

$$\left[-2q\, e^{-q^2-\dot q^2} - 4q\dot q e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-x^2}dx\right] - \left[2e^{-q^2-\dot q^2}\ddot q - 4q\dot q e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-x^2}\right] = 0, \quad \text{т.е.}$$

$$-2q\, e^{-q^2-\dot q^2} - 4q\dot q e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-x^2}dx - 2e^{-q^2-\dot q^2}\ddot q + 4q\dot q e^{-q^2}\int_0^{\dot q} e^{-x^2} = 0\,,$$

$$-2e^{-q^2-\dot q^2}(\ddot q + q) = 0\,,$$

откъдето след разделяне с $-2e^{-q^2-\dot q^2} \neq 0$ стигаме до търсеното уравнение на Лагранж за системата

(4) $$\ddot q + q = 0\,.$$

б) при зададен по условие лагранжиан (*функция на Лагранж*)

(5) $$L(q,\dot q,t) = \frac{1}{2}e^{\alpha t}(\dot q^2 - \omega^2 q^2)\,,$$

работейки по същия начин, както в първото подусловие, получаваме последователно

(6[А]) $$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{1}{2}e^{\alpha t}(-2\omega^2 q) = -\omega^2 e^{\alpha t} q\,,$$

(6[Б]) $$\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{1}{2}e^{\alpha t}(2\dot q) = e^{\alpha t}\dot q\,,$$

(6[В]) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = \frac{d}{dt}(e^{\alpha t}\dot q) = \alpha\, e^{\alpha t}\dot q + e^{\alpha t}\ddot q\,.$$

Заместваме производните (6[А]) и (6[В]) в уравнението на Лагранж $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} = 0$, и получаваме

(7) $\quad -\omega^2 e^{\alpha t} q - \alpha e^{\alpha t} \dot{q} - e^{\alpha t} \ddot{q} = 0$,

от което, след съкращаване на $\quad -e^{\alpha t} \neq 0$, получаваме

(8) $\quad \ddot{q} + \alpha \dot{q} + \omega^2 q = 0$.

✸ **Задача 3.3 (**Стр. 27/Зад. 164^{А}**)**

Да се интегрират уравненията на Лагранж при посочените начални условия, ако функцията на Лагранж е

$$L(\dot{q},t) = \frac{\dot{q}^2}{2} + t^2 \dot{q}; \qquad q(0) = 0; \quad \dot{q}(0) = 1.$$

Решение: системата се описва с функция на Лагранж

(1) $\quad L(\dot{q},t) = \dfrac{\dot{q}^2}{2} + t^2 \dot{q}$.

За изразяването на уравнението на Лагранж

(2) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial q} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$

в явен вид определяме последователно

(3^{А}) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial q} = 0$, $\qquad$ (*понеже* L *не зависи явно от обобщената координата* q).

(3^{Б}) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \dot{q} + t^2$, $\qquad \Rightarrow \qquad$ (3^{В}) $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \ddot{q} + 2t$.

След заместване на (3^{А}) и (3^{В}) в (2) получаваме

(4) $\quad \ddot{q} + 2t = 0$.

Решаваме това уравнение на Лагранж при следните начални условия

(5^{А}) $\quad q(0) = 0 \quad$ и $\quad$ (5^{Б}) $\quad \dot{q}(0) = 1$.

За интегрирането на ОДУ (4) най-напред го представяме във вида

(6^{А}) $\quad \dfrac{d}{dt}(\dot{q}) = -2t$, $\qquad$ или още $\qquad$ (6^{Б}) $\quad d(\dot{q}) = -2t\,dt$,

решаването на което дава

(7) $\quad \dot{q} = -2\dfrac{t^2}{2} + C_1 = -t^2 + C_1$.

С прилагането на началното условие (5^{Б}) определяме интеграционната константа $C_1 = 1$. Така (7) добива вида

(8) $\quad \dot{q} = -t^2 + 1$.

Това ОДУ с разделени променливи се интегрира елементарно

(9) $\quad dq = (-t^2 + 1)dt \quad \Rightarrow \quad q(t) = -\dfrac{t^3}{3} + t + C_2$.

Тази втора интеграционна константа определяме от началното условие (5^{А}), съгласно което $C_2 = 0$.

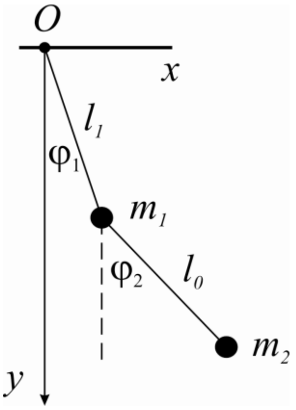
Така решението на уравнението на Лагранж, удовлетворяващо началните условия (5^{А,Б}) се представя във вида

(10) $\quad q(t) = t - \dfrac{t^3}{3}$.

✸ Задача 3.3

Да се определи функцията на Лагранж за системата, представляваща двойно математическо махало.

Решение: търси се функцията на Лагранж за системата, показана на фигурата.



Приемаме, че тази система се намира в гравитационно поле ($\vec{g}$). По дефиниция функцията на Лагранж за една материална точка се изразява чрез нейните кинетична (T) и потенциална (U) енергии посредством равенството

(1) $\quad L = T - U$.

Тази формула остава в сила и за система от материални точки, ако под T се разбира пълната кинетична енергия на системата, а под U - нейната пълна потенциална енергия. След тази уговорка можем да пристъпим към определянето на тези енергии за всяка от частиците, от които е съставено сложното махало.

а) за първата частица, имаща маса m_1, линейната скорост на движение V_1 се изразява посредством ъгловата й скорост $\omega_1 = \dot{\varphi}_1$ на въртене около т. О посредством равенството $V_1 = \omega_1 l_1 = \dot{\varphi}_1 l_1$, следователно кинетичната й енергия ще бъде равна на

(2) $$T_1 = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 .$$

Потенциалната енергия на същата тази точка е

(3) $$U_1 = -m_1 g y_1 = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 .$$

б) декартовите координати на втората точка, имаща маса m_2, са:

(4) $$\left| \begin{array}{l} x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \\ y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 \end{array} \right. .$$

Тогава кинетичната й енергия е

$$T_2 = \frac{m_2}{2} V_2^2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2) = \frac{m_2}{2}[(l_1 \cos\varphi_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \cos\varphi_2 \dot{\varphi}_2)^2 + (-l_1 \sin\varphi_1 \dot{\varphi}_1 - l_2 \sin\varphi_2 \dot{\varphi}_2)^2] =$$

$$= \frac{m_2}{2}[l_1{}^2 \dot{\varphi}_1{}^2 + 2 l_1 l_2 (\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + l_2{}^2 \dot{\varphi}_2{}^2], \qquad \text{т.е.}$$

(5) $$T_2 = \frac{m_2}{2}[l_1{}^2 \dot{\varphi}_1{}^2 + l_2{}^2 \dot{\varphi}_2{}^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2].$$

Потенциалната енергия на втората точка е

(6) $$U_2 = -m_2 g y_2 = -m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2).$$

Чрез (2) и (5) определяме пълната кинетична енергия $T = T_1 + T_2$, а чрез (3) и (6) – пълната потенциална енергия $U = U_1 + U_2$ на системата от двете частици (*сложно махало*), което позволява да се определи лагранжианът (1) на тази система

(7) $$L = \frac{m_1}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2}[l_1{}^2 \dot{\varphi}_1{}^2 + l_2{}^2 \dot{\varphi}_2{}^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2] -$$
$$-[-m_1 g l_1 \cos\varphi_1 - m_2 g (l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2)],$$

т.е. търсеният лагранжиан е

$$\boxed{L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2{}^2 \dot{\varphi}_2{}^2 + l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2}.$$

✸ **Задача 3.4 (**Стр. 28/Зад. 168**)**

Да се определи движението на тежка материална точка, принудена да се движи във вертикална равнина Oxy по крива с параметрични уравнения $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$, $z = 0$. Оста Oy е вертикална, с посока нагоре.

Решение: В качеството на обобщена координата избираме параметъра φ от параметрично-зададените уравнения

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{l} x = x(\varphi) \\ y = y(\varphi) \\ z = 0 \end{array}\right.$$

Функцията на Лагранж за материалната точка е

$$L(\varphi,\dot{\varphi}) = T(\dot{\varphi}) - U(\varphi) = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2] - mg.y =$$

$$= \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right] - mg.y = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2 - mg.y\text{, т.е.}$$

$$(2)\qquad L = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial x(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right]\dot{\varphi}^2 - mg.y(\varphi).$$

Уравнението на Лагранж е

$$(3)\qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 0.$$

За да го получим в явен вид нека (*за удобство*) най-напред пресметнем производните, участващи в него. При това диференцирането по φ и по $\dot{\varphi}$ се извършва така, сякаш φ и $\dot{\varphi}$ са независими променливи. Диференцирането по времето t, обаче, се прилага спрямо всяка зависеща от t функция.

☞ $$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{m}{2}\left[2.\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + 2.\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right]\dot{\varphi}^2 - mg.\frac{\partial y}{\partial\varphi} = m\left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right]\dot{\varphi}^2 - mg.\frac{\partial y}{\partial\varphi};$$

☞ $$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{\partial x(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right]2.\dot{\varphi} = m\left[\left(\frac{\partial x(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(\varphi)}{\partial\varphi}\right)^2\right].\dot{\varphi};$$

☞ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m\left[2.\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}.\dot{\varphi} + 2.\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}.\dot{\varphi}\right].\dot{\varphi} + m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\right].\ddot{\varphi} =$$

$$= 2m\left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right].\dot{\varphi}^2 + m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\right].\ddot{\varphi}.$$

Заместваме така намерените производни в (3)

$$m\left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right]\dot{\varphi}^2 - mg.\frac{\partial y}{\partial\varphi} - 2m\left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right].\dot{\varphi}^2 - m\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\right].\ddot{\varphi} = 0$$

След съкращения и разделяне с $(-m)$ получаваме

(4) $$\left[\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2\right].\ddot{\varphi}+\left[\frac{\partial x}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 x}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}\right]\dot{\varphi}^2+g.\frac{\partial y}{\partial\varphi}=0.$$

Това е ДУ за параметъра $\varphi=\varphi(t)$. След неговото решаване законът за движение на материалната точка може да бъде изразен в явен вид

(15) $$\left|\begin{array}{l} x=x[\varphi(t)] \\ y=y[\varphi(t)]. \\ z=0 \end{array}\right.$$

✸ **Задача 3.5 (**Стр. 28/Зад. 169**)**

Тежка материална точка е принудена да се движи във вертикалната равнина Оxy по циклоида с параметрични уравнения $x=a^2(\varphi-\sin\varphi)$, $y=a^2(1+\cos\varphi)$, $z=0$. Оста Оy е вертикална и насочена нагоре. Да се определи закона за движение на материалната точка.

Решение:

(1) $$\left|\begin{array}{l} x=a^2(\varphi-\sin\varphi) \\ y=a^2(1+\cos\varphi) \end{array}\right. \quad\Rightarrow\quad (1') \left|\begin{array}{l} \dot{x}=a^2(1-\cos\varphi).\dot{\varphi} \\ \dot{y}=a^2(-\sin\varphi).\dot{\varphi} \end{array}\right.$$

За обобщена координата избираме параметъра φ от (1). Функцията на Лагранж за материалната точка е

(2) $$L(\varphi,\dot{\varphi})=T(\dot{\varphi})-U(\varphi)=\frac{m}{2}[\dot{x}^2+\dot{y}^2]+mg.y.$$

(3) $$T=\frac{m}{2}a^4[1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi+\sin^2\varphi].\dot{\varphi}^2=\frac{m}{2}a^4[2-2\cos\varphi].\dot{\varphi}^2=$$

$$=ma^4[1-\cos\varphi].\dot{\varphi}^2=2m\,a^4.\dot{\varphi}^2\sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

(4) $$U=mg\,.\,a^2(1+\cos\varphi)$$

(5) $$L=T-U=2m\,a^4.\dot{\varphi}^2\sin^2\frac{\varphi}{2}-mg\,.\,a^2(1+\cos\varphi)$$

Уравнението на Лагранж е

(6) $$\frac{\partial L}{\partial\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=0.$$

☞ $$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=2m\,a^4.\dot{\varphi}^2\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}.\frac{1}{2}\right)-mg\,.\,a^2(-\sin\varphi)=$$

$$=m\,a^4.\dot{\varphi}^2\left(2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)+mg\,.\,a^2\sin\varphi=m\,a^4.\dot{\varphi}^2\sin\varphi+mg\,.\,a^2\sin\varphi;$$

☞ $$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=2m\,a^4.[2\dot{\varphi}]\sin^2\frac{\varphi}{2}=4m\,a^4.\dot{\varphi}.\sin^2\frac{\varphi}{2};$$

☞ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=4m\,a^4.\ddot{\varphi}.\sin^2\frac{\varphi}{2}+4m\,a^4.\dot{\varphi}.\,2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}.\frac{1}{2}.\dot{\varphi}=$$

$$=4m\,a^4.\ddot{\varphi}.\sin^2\frac{\varphi}{2}+2m\,a^4.\dot{\varphi}^2.\sin\varphi.$$

Заместваме така намерените производни в уравнението на Лагранж (6)

$$m\,a^4.\dot{\varphi}^2\sin\varphi + mg\,.\,a^2\sin\varphi - 4m\,a^4.\ddot{\varphi}.\,\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2m\,a^4.\dot{\varphi}^2.\sin\varphi = 0\,.$$

(7) $$-4m\,a^4.\ddot{\varphi}.\,\sin^2\frac{\varphi}{2} - m\,a^4.\dot{\varphi}^2\sin\varphi + mg\,.\,a^2\sin\varphi = 0\,.$$

След представяне на $\sin\varphi = 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$ уравнението добива вида

(8) $$-4m\,a^4.\ddot{\varphi}.\,\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2m\,a^4.\dot{\varphi}^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} + 2mg\,.a^2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 0\,.$$

Разделяме двете страни на горното уравнение с $(-2ma^2\sin\frac{\varphi}{2})$

(9) $$\boxed{2a^2.\,\sin\frac{\varphi}{2}\,\ddot{\varphi} + a^2.\dot{\varphi}^2\cos\frac{\varphi}{2} - g\cos\frac{\varphi}{2} = 0}.$$

За решаването на това ОДУ от II ред полагаме

(10) $$\boxed{z(t) = \cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Нека определим производните $\frac{dz}{dt}$ и $\frac{d^2z}{dt^2}$:

☞ $$\frac{dz}{dt} = -\sin\frac{\varphi}{2}.\frac{1}{2}.\dot{\varphi}$$

☞ $$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(-\sin\frac{\varphi}{2}.\frac{1}{2}.\dot{\varphi}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sin\frac{\varphi}{2}.\dot{\varphi}\right) = -\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}.\frac{1}{2}.\dot{\varphi}.\dot{\varphi} + \sin\frac{\varphi}{2}.\ddot{\varphi}\right),$$ т.е.

(11) $$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{1}{4}\left(\cos\frac{\varphi}{2}.\dot{\varphi}^2 + 2\sin\frac{\varphi}{2}.\ddot{\varphi}\right).$$

Ако двете страни на (11) умножим с $(-4a^2)$, получаваме

(12) $$-4a^2\frac{d^2z}{dt^2} = 2a^2\sin\frac{\varphi}{2}.\ddot{\varphi} + a^2\cos\frac{\varphi}{2}.\dot{\varphi}^2\,.$$

Нека заместим $2a^2\sin\frac{\varphi}{2}.\ddot{\varphi} + a^2\cos\frac{\varphi}{2}.\dot{\varphi}^2$ от (12) в лявата страна на (9). Ако отчетем още, че по полагане $\cos\frac{\varphi}{2} = z(t)$, то (9) добива вида

(13) $$-4a^2\frac{d^2z(t)}{dt^2} - g\,z(t) = 0\,.$$

Разделяме двете страни на (13) с $(-4a^2)$ и получаваме

(14) $$\frac{d^2z(t)}{dt^2} + \left(\frac{g}{4a^2}\right)z(t) = 0\,.$$

В този си вид уравнение (14) представлява уравнение на хармоничен осцилатор, собствената честота на колебанията на който се дава с

(15) $$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{4a^2}} = \frac{\sqrt{g}}{2|a|},$$

а периодът на тези колебания е

(16) $$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\frac{2|a|}{\sqrt{g}} = \frac{4\pi|a|}{\sqrt{g}}\,.$$

Решението на (14) е

(17) $$z(t)=C_1\cos(\omega_0 t+C_2),$$

но понеже по полагане $z(t)=\cos\dfrac{\varphi}{2}$, то

(18) $$\cos\frac{\varphi}{2}=C_1\cos(\omega_0 t+C_2),$$

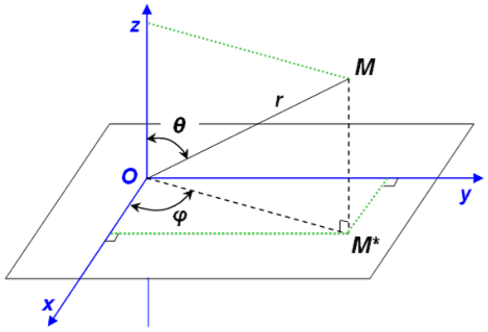
откъдето

(19) $$\varphi(t)=2\arccos[C_1\cos(\omega_0 t+C_2)]=2\arccos\left[C_1\cos\left(\frac{\sqrt{g}}{2|a|}t+C_2\right)\right].$$

Уравнение (14) и неговото решение (17) показват, че материалната точка извършва хармонично трептене с честота (15) и период (16).

✸ **Задача 3.6 (**Стр. 28/Зад. 174**)**

(*Сферично махало*) Да се определи движението на сферично математично махало, т.е. тежка материална точка М, принудена да се движи по неподвижна сфера с радиус R.



Решение: Избираме за обобщени координати на сферичното махало ъглите θ и φ.

Връзката между декартови (x,y,z) и сферични $(r\equiv R,\theta,\varphi)$ координати се дава със съотношенията

(1) $$\left|\begin{aligned} x&=R.\sin\theta.\cos\varphi\\ y&=R.\sin\theta.\sin\varphi\\ z&=R.\cos\theta\end{aligned}\right.$$

Производните по времето на тези координати, необходими за изчисляването на кинетичната енергия T на махалото, са

(2) $$\left|\begin{aligned} \dot{x}&=R.\cos\theta.\dot{\theta}\cos\varphi-R.\sin\theta.\sin\varphi.\dot{\varphi}\\ \dot{y}&=R.\cos\theta.\dot{\theta}\,\sin\varphi+R.\sin\theta.\cos\varphi.\dot{\varphi}\\ \dot{z}&=-R.\sin\theta.\dot{\theta}\end{aligned}\right.$$

Тогава кинетичната енергия на махалото е

(3) $$\begin{aligned} T=\frac{m}{2}[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2]=\frac{m}{2}\{&[R^2\cos^2\theta.\dot{\theta}^2\cos^2\varphi-2R^2.\sin\theta\cos\theta.\sin\varphi\cos\varphi.\dot{\theta}.\dot{\varphi}+\\ &+R^2.\sin^2\theta.\sin^2\varphi.\dot{\varphi}^2]+[R^2\cos^2\theta.\dot{\theta}^2\sin^2\varphi+2R^2.\sin\theta\cos\theta.\sin\varphi\cos\varphi.\dot{\theta}\dot{\varphi}+\\ &+R^2.\sin^2\theta.\cos^2\varphi.\dot{\varphi}^2]+[R^2\sin^2\theta.\dot{\theta}^2]\}.\end{aligned}$$

След извършването на елементарни приведения изразът за T добива вида

(4) $$T=\frac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2).$$

Потенциалната енергия на махалото е

(5) $$U=mgz=mgR\cos\theta.$$

Следователно лагранжиана на сферичното махало е

(6) $$L=T-U=\frac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2)-mgR\cos\theta.$$

Очевидно $L = L(\theta, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$, т.е. L не зависи явно от обобщената координата φ, което означава, че φ е циклична координата.

Получаване на уравненията на Лагранж:

А) уравнение на Лагранж за φ - цикличната координата

Понеже $L \neq L(\varphi)$, то $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$. Тогава от уравнението на Лагранж

(7) $$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

следва, че $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$, т.е. обобщеният импулс $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = C_0$ (C_0-*константа*) се явява интеграл на движението (*запазваща се във времето величина*). Ако от (6) определим обобщения импулс в явен вид

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi},$$

то очевидно функцията

(8) $$mR^2 \sin^2\theta\,\dot{\varphi} = C_0$$

е търсения интеграл на движението. Ако (*за удобство*) положим $C_1 = \dfrac{C_0}{mR^2}$, то (8) добива вида

(9) $$\sin^2\theta\,\dot{\varphi} = C_1$$

и неговото решение ще бъде

(10) $$\varphi(t) = \int \frac{C_1\,dt}{\sin^2\theta(t)} + C_2,$$

където C_1 и C_2 са интеграционни константи.

Б) уравнение на Лагранж за θ:

(11) $$\frac{\partial L}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = 0.$$

Производните в (11) определяме от (6)

☞ $$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{m}{2}R^2 2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 - mgR(-\sin\theta) = mR^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 + mgR\sin\theta;$$

☞ $$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{m}{2}R^2 2\dot{\theta} = mR^2\dot{\theta},$$ ☞ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\ddot{\theta}.$$

Заместваме така намерените производни в (11) и получаваме

(12) $$mR^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 + mgR\sin\theta - mR^2\ddot{\theta} = 0$$

След разделяне на двете страни на горното уравнение с ($-mR^2$) получаваме

(13) $$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 - \frac{g}{R}\sin\theta = 0.$$

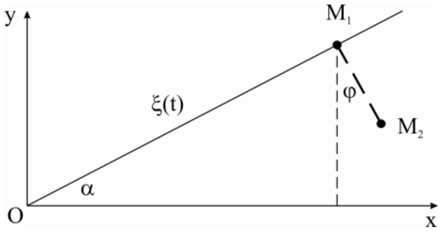
Ако в (13) заместим $\dot{\varphi}$ от (9), ще получим

(14) $$\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\left(\frac{C_1}{\sin^2\theta}\right)^2 - \frac{g}{R}\sin\theta = 0,$$ т.е.

(15) $\ddot{\theta}-\cos\theta\,\dfrac{C_1^{\,2}}{\sin^3\theta}-\dfrac{g}{R}\sin\theta=0$.

✸ **Задача 3.7 (**Стр. 30/Зад. 179**)**

Да се определи движението на система от две тежки материално точки M_1 и M_2, принудени да се движат в постоянна вертикална равнина Oxy, като M_1 се движи по постоянна права g, сключваща ъгъл α с хоризонта, по известен закон $\xi=\xi(t)$, и разстоянието $|M_1M_2|=\ell=const$.



Решение: По условие $OM_1\equiv\xi(t)$ е **известна функция**; $|M_1M_2|=l=const$.

За обобщена координата на махалото (т.е. т. M_2) избираме ъгъла φ.

Декартовите координати на точките M_1 и M_2 са съответно:

(1) $\left|\begin{array}{l} x_1=\xi(t).\cos\alpha \\ y_1=\xi(t).\sin\alpha \end{array}\right.$, и (2) $\left|\begin{array}{l} x_2=x_1+l\sin\varphi=\xi(t).\cos\alpha+l\sin\varphi \\ y_2=y_1-l\cos\varphi=\xi(t).\sin\alpha-l\cos\varphi \end{array}\right.$,

а техните производни по времето са

(3) $\left|\begin{array}{l} \dot{x}_1=\dot{\xi}(t).\cos\alpha \\ \dot{y}_1=\dot{\xi}(t).\sin\alpha \end{array}\right.$, и (4) $\left|\begin{array}{l} \dot{x}_2=\dot{\xi}(t).\cos\alpha+l\cos\varphi\,\dot{\varphi} \\ \dot{y}_2=\dot{\xi}(t).\sin\alpha-l(-\sin\varphi)\dot{\varphi} \end{array}\right.$.

Кинетичните енергии на двете тела са:

(5) $T_1=\dfrac{m_1}{2}[\dot{x}_1^{\,2}+\dot{y}_1^{\,2}]=\dfrac{m_1}{2}\dot{\xi}^2(t)$, и

(6) $T_2=\dfrac{m_1}{2}[\dot{x}_2^{\,2}+\dot{y}_2^{\,2}]=\dfrac{m_2}{2}[\dot{\xi}^2(t).\cos^2\alpha+2l\dot{\xi}(t).\cos\alpha\cos\varphi\,\dot{\varphi}+l^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2+$

$+\dot{\xi}^2(t).\sin^2\alpha+2l\dot{\xi}(t).\sin\alpha\sin\varphi\,\dot{\varphi}+l^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2]=$

$=\dfrac{m_2}{2}\{\dot{\xi}^2(t)+l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{\xi}(t).\dot{\varphi}[\cos\alpha\cos\varphi+\sin\alpha\sin\varphi]\}=$

$=\dfrac{m_2}{2}\{\dot{\xi}^2(t)++l^2\dot{\varphi}^2+2l\dot{\xi}(t).\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi)\}$.

Общата кинетична енергия на системата от двете тела е

(7) $T=T_1+T_2=\dfrac{m_1+m_2}{2}\dot{\xi}^2(t)+\dfrac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{\xi}(t).\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi)$,

а потенциалната им енергия е

(8) $U=m_1g.y_1+m_2g.y_2=m_1g.\xi(t).\sin\alpha+m_2g.[\xi(t).\sin\alpha-l\cos\varphi]=$
$=(m_1+m_2)g.\xi(t).\sin\alpha-m_2gl\cos\varphi$.

Лагранжианът $L=T-U$ на системата е

$$\boxed{L=\frac{m_1+m_2}{2}\dot{\xi}^2(t)+\frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2+m_2l\dot{\xi}(t).\dot{\varphi}\cos(\alpha-\varphi)-(m_1+m_2)g.\xi(t).\sin\alpha+m_2gl\cos\varphi}$$

При известен лагранжиан можем да определим уравнението на Лагранж за махалото

(9) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$,

като за целта предварително определяме производните

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l \dot{\xi}(t).\dot{\varphi}\,[-\sin(\alpha-\varphi)(-1)] + m_2\, g\, l(-\sin\varphi) = m_2 l \dot{\xi}(t).\dot{\varphi}\sin(\alpha-\varphi) - m_2\, g\, l \sin\varphi$;

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \dfrac{m_2}{2} l^2\,(2.\dot{\varphi}) + m_2 l \dot{\xi}(t).\cos(\alpha-\varphi) = m_2 l^2\, \dot{\varphi} + m_2 l \dot{\xi}(t).\cos(\alpha-\varphi)$;

☞ $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l^2\, \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{\xi}(t).\cos(\alpha-\varphi) + m_2 l \dot{\xi}(t).[-\sin(\alpha-\varphi)(-1)\,\dot{\varphi}] =$

$= m_2 l^2\, \ddot{\varphi} + m_2 l \ddot{\xi}(t).\cos(\alpha-\varphi) + m_2 l \dot{\xi}(t).\sin(\alpha-\varphi)\,\dot{\varphi}$.

След заместване на тези производни в (9) за уравнението на Лагранж получаваме

(10) $\quad m_2 l \dot{\xi}.\dot{\varphi}\sin(\alpha-\varphi) - m_2\, g\, l \sin\varphi - m_2 l^2 \ddot{\varphi} - m_2 l \ddot{\xi}.\cos(\alpha-\varphi) - m_2 l \dot{\xi}.\dot{\varphi}.\sin(\alpha-\varphi) = 0$.

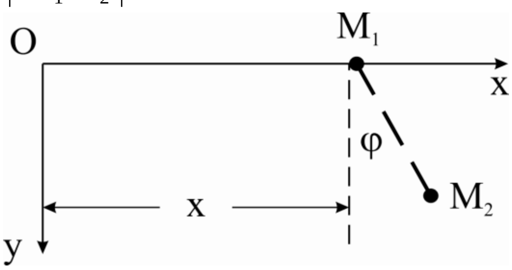
След извършване на съкращения и разделяне с ($-m_2 l$) получаваме

(11) $\quad l\ddot{\varphi} + \ddot{\xi}.\cos(\alpha-\varphi) + g\sin\varphi = 0$.

При известна функция $\xi = \xi(t)$ горното уравнение е ОДУ от II ред за неизвестната функция $\varphi = \varphi(t)$, определянето на която позволява еднозначно да се опише (във всеки момент време t) положението на т. M_2 относно вертикалата, прекарана през точката на окачване M_1, движеща се по наклонената права по известен закон $\xi = \xi(t)$.

✸ **Задача 3.8 (**Стр. 31/Зад. 181**)**

Да се определи движението на математично махало M_2 с маса m_2, принудено да се движи по постоянна вертикална равнина Oxy, точката на окачване M_1 на което (с маса m_1) е принудена да се движи по постоянна хоризонтална ос Ox, като $|M_1 M_2| = \ell = const$.



Решение: Върху системата от две тела, съставляващи математическото махало с подвижна точка на окачване, са наложени общо 4 връзки:

- две са наложени върху M_1 (движи се само по хоризонталната права Ox);

- една е наложена върху M_2 (движи се само в равнината Oxy);

- една връзка е наложена поради обстоятелството, че $|M_1 M_2| = l = const$.

По този начин броя на степените на свобода s на системата от $N = 2$ тежки материални точки с наложени $k = 4$ на брой връзки е $s = 3.N - k = 3.2 - 4 = 2$. Следователно за описание движението на системата са необходими $s = 2$ независими обобщени координати. Избираме те да бъдат разстоянието $x(t) = OM_1$ и ъгълът $\varphi(t)$, който $M_1 M_2$ сключва с вертикалата.

Изразяваме декартовите координати на двете точки посредством обобщените координати:

(1) $\left| \begin{array}{l} x_1 = x(t) \\ y_1 = 0 \end{array} \right.$ и (2) $\left| \begin{array}{l} x_2 = x(t) + l\sin\varphi \\ y_2 = l\cos\varphi \end{array} \right.$.

Изразяваме последователно кинетичните и потенциалните енергии на двете тела, а след това кинетичната и потенциалната енергия на системата:

(3) $\left| \begin{array}{l} T_1 = \dfrac{m_1}{2}(\dot{x}_1{}^2 + \dot{y}_1{}^2) = \dfrac{m_1}{2}\dot{x}^2(t) \\ U_1 = m_1\, g\, y_1 = 0 \end{array} \right.$;

(4) $\left| \begin{array}{l} T_2 = \dfrac{m_2}{2}(\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2) = \dfrac{m_2}{2}\{[\dot{x} + l\cos\varphi.\dot{\varphi}]^2 + [-l\sin\varphi\dot{\varphi}]^2\} = \dfrac{m_2}{2}\{\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\} \\ U_2 = m_2\, g\, y_2 = m_2\, g\, l\cos\varphi \end{array} \right.$;

(5) $\left| \begin{array}{l} T = T_2 + T_2 = \dfrac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dfrac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 \\ U = U_1 + U_2 \equiv U_2 = m_2\, g\, l\cos\varphi \end{array} \right.$.

Функцията на Лагранж за тази система е

(6) $L = T - U = \dfrac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dfrac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - m_2\, g\, l\cos\varphi$.

Уравненията на Лагранж са $s = 2$ на брой.

А) уравнение за обобщената координата $\varphi(t)$:

(7) $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$.

За намиране на (7) в явен вид определяме производните

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}[-\sin\varphi] - m_2\, g\, l[-\sin\varphi] = -m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2\, g\, l\sin\varphi$;

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l\dot{x}\cos\varphi + \dfrac{m_2}{2}l^2(2\dot{\varphi}) = m_2 l\dot{x}\cos\varphi + m_2 l^2\dot{\varphi}$;

☞ $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + m_2 l\dot{x}(-\sin\varphi\dot{\varphi}) + m_2 l^2\ddot{\varphi} = m_2 l\ddot{x}\cos\varphi - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2 l^2\ddot{\varphi}$.

Заместваме така намерените производни в (7)

(8) $-m_2 l\,\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2\, g\, l\sin\varphi - m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 l^2\ddot{\varphi} = 0$

След съкращения и разделяне на ($-ml$) получаваме

(9) $l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0$.

Б) уравнение за обобщената координата $x(t)$:

(10) $\dfrac{\partial L}{\partial x} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0$.

За намиране на (10) в явен вид определяме производните. Понеже $L \neq L(x)$, то

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$, следователно $x(t)$ е циклична координата. За нея уравнението (10) добива вида

(11) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, следователно $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C_1$, където C_1-интеграционна константа. Равенството $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C_1$ означава, че функцията $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$ е интеграл на движението. Нека го определим, намирайки производната на лагранжиана (6)

(12) $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m_1+m_2}{2}(2\dot{x}) + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = (m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = C_1$.

Търсеният интеграл на движението е

(13) $(m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\cos\varphi\,\dot{\varphi} = C_1$.

Оказва се, че лявата страна на (13) е пълен диференциал, понеже

(14) $(m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\cos\varphi\,\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}[(m_1+m_2)x + m_2 l\sin\varphi]$.

Замествайки (14) в (13) получаваме

(15) $d[(m_1+m_2)x + m_2 l\sin\varphi] = C_1.dt$,

откъдето след интегриране намираме

(16) $(m_1+m_2)x + m_2 l\sin\varphi = C_1.t + C_2$.

И така второто от уравненията на Лагранж допусна точно аналитично решение. Ако от решението (16) изразим $\ddot{x}$ и заместим в първото от уравненията, т.е. в (9), ще получим ДУ за намирането на функцията $\varphi = \varphi(t)$:

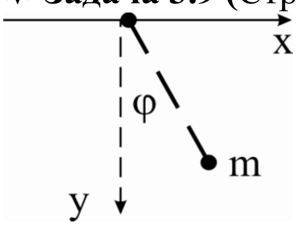
$$x = -\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\sin\varphi + \frac{1}{m_1+m_2}[C_1.t + C_2];$$

$$\dot{x} = -\frac{m_2 l}{m_1+m_2}\cos\varphi\dot{\varphi} + \frac{C_1}{m_1+m_2}$$

$$\ddot{x} = -\frac{m_2 l}{m_1+m_2}(-\sin\varphi\dot{\varphi})\dot{\varphi} - \frac{m_2 l}{m_1+m_2}\cos\varphi\ddot{\varphi} = \frac{m_2 l}{m_1+m_2}[\sin\varphi\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\ddot{\varphi}].$$

Заместването на $\ddot{x}$ в (9) действително води до ДУ от втори ред относно функцията $\varphi = \varphi(t)$.

✸ **Задача 3.9 (**Стр. 31/Зад. 182**)**



Да се определи движението на математично махало с дължина ℓ и маса m, точката на окачване на което се движи по постоянна хоризонтална ос Ox по закона $x = a\cos\omega t$, където $a > 0$ и $\omega > 0$.

Решение: декартовите координати на тялото (махалото) с маса m са

(1) $\left| \begin{aligned} x &= a\cos\omega t + l\sin\varphi \\ y &= l\cos\varphi \end{aligned} \right.$.

Функцията на Лагранж $L = T - U$ за махалото е

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - (-mgy) = \frac{m}{2}[(-a\omega\sin\omega t + l\cos\varphi.\dot{\varphi})^2 + (-l\sin\varphi\dot{\varphi})^2] + mgl\cos\varphi =$$

$$= \frac{m}{2}[a^2\omega^2\sin^2\omega t - 2a\omega l.\,\dot{\varphi}\sin\omega t\cos\varphi + l^2\cos^2\varphi.\dot{\varphi}^2 + l^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2] + mgl\cos\varphi$$, или

(2) $\quad L=\dfrac{m}{2}a^2\omega^2\sin^2\omega t-ma\omega l\,\dot{\varphi}\sin\omega t\cos\varphi+\dfrac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2+mgl\cos\varphi$.

Уравнението на Лагранж е

(3) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial\varphi}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=0$.

Производните, участващи в (3), са

☞ $\quad \dfrac{\partial L}{\partial\varphi}=-ma\omega l\,\dot{\varphi}\sin\omega t(-\sin\varphi)+mgl(-\sin\varphi)=ma\omega l\,\dot{\varphi}\sin\omega t\sin\varphi-mgl\sin\varphi$;

☞ $\quad \dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=-ma\omega l\sin\omega t\cos\varphi+\dfrac{m}{2}l^2(2\dot{\varphi})=-ma\omega l\sin\omega t\cos\varphi+ml^2\dot{\varphi}$;

☞ $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=-ma\omega l\,(\omega\cos\omega t)\cos\varphi-ma\omega l\sin\omega t(-\sin\varphi\,\dot{\varphi})+ml^2\ddot{\varphi}=$

$=-ma\omega^2\,l\cos\omega t\cos\varphi+ma\omega l\,\dot{\varphi}\,\sin\omega t\sin\varphi+ml^2\ddot{\varphi}$.

Заместваме така намерените производни в (3) и получаваме уравнението

$$ma\omega l\,\dot{\varphi}\sin\omega t\sin\varphi-mgl\sin\varphi+ma\omega^2\,l\cos\omega t\cos\varphi-ma\omega l\,\dot{\varphi}\,\sin\omega t\sin\varphi-ml^2\ddot{\varphi}=0.$$

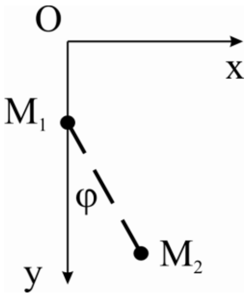
След съкращения и разделяне с $(-ml)$ горното уравнение добива вида

(4) $\quad l\ddot{\varphi}-a\omega^2\cos\omega t\cos\varphi+g\sin\varphi=0$.

Това е уравнението на движение на махалото, а неговото решение $\varphi=\varphi(t)$ позволява да се опише движението му във всеки момент от време.

✸ **Задача 3.10 (**Стр. 31/Зад. 183**)**

Да се определи движението на математично махало с дължина ℓ и маса m, точката на окачване на което се движи по вертикална ос Оу по закона $y=a\cos\omega t$, където $a>0$ и $\omega>0$.



Решение: Задачата е съвсем сходна с предходната, като единствената разлика тук е, че точката на окачване на махалото се движи (*по просто-периодичен закон*) не по хоризонталната, а по вертикалната ос Оу. Поради това решението ще бъде приведено в съвсем схематичен вид:

(1) $\left|\begin{array}{l} x_1=0 \\ y_1=a\cos\omega t \end{array}\right.$ и (2) $\left|\begin{array}{l} x_2=l\sin\varphi \\ y_2=a\cos\omega t+l\cos\varphi \end{array}\right.$.

(3) $\quad T_1=\dfrac{m_1}{2}(\dot{x}_1{}^2+\dot{y}_1{}^2)=\dfrac{m_1}{2}a^2\omega^2\sin^2\omega t$;

(4) $\quad U_1=-m_1\,g\,y_1=-m_1\,g\,a\cos\omega t$.

(5) $\quad T_2=\dfrac{m_2}{2}(\dot{x}_2{}^2+\dot{y}_2{}^2)=\dfrac{m_2}{2}\{[l\cos\varphi.\dot{\varphi}]^2+[-a\omega\sin\omega t-l\sin\varphi\,\dot{\varphi}]^2\}=$

$=\dfrac{m_2}{2}\{a^2\omega^2\sin^2\omega t+2al\omega\dot{\varphi}\cos\varphi.\sin\omega t+l^2\dot{\varphi}^2\}$;

(6) $\quad U_2=-m_2\,g\,y_2=-m_2\,g\,(a\cos\omega t+l\cos\varphi)$.

(7) $\quad T=T_2+T_2=\dfrac{m_1}{2}a^2\omega^2\sin^2\omega t+\dfrac{m_2}{2}\{a^2\omega^2\sin^2\omega t+2al\omega\dot{\varphi}\sin\varphi.\sin\omega t+l^2\dot{\varphi}^2\}=$

$=\dfrac{m_1+m_2}{2}a^2\omega^2\sin^2\omega t+m_2al\omega\dot{\varphi}\sin\varphi.\sin\omega t+\dfrac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2$.

(8) $U=U_1+U_2=-m_1\,g\,a\cos\omega t-m_2\,g\,(a\cos\omega t+l\cos\varphi)$

Функция на Лагранж

$$L=\frac{m_1+m_2}{2}a^2\omega^2\sin^2\omega t+m_2al\omega\dot{\varphi}\sin\varphi.\sin\omega t+\frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2+(m_1+m_2)g\,a\cos\omega t+m_2\,g\,l\cos\varphi$$

Уравнение на Лагранж

(9) $\dfrac{\partial L}{\partial\varphi}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=0$

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial\varphi}=m_2al\omega\dot{\varphi}\cos\varphi.\sin\omega t-m_2\,g\,l\sin\varphi$;

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=m_2al\omega\sin\varphi.\sin\omega t+\dfrac{m_2}{2}l^2(2\dot{\varphi})=m_2al\omega\sin\varphi.\sin\omega t+m_2l^2\dot{\varphi}$

☞ $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=m_2al\omega(\cos\varphi.\dot{\varphi})\sin\omega t+m_2al\omega\sin\varphi.(\omega\cos\omega t)+m_2l^2\ddot{\varphi}=$

$=m_2al\omega.\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\omega t+m_2al\omega^2\sin\varphi.\cos\omega t+m_2l^2\ddot{\varphi}$.

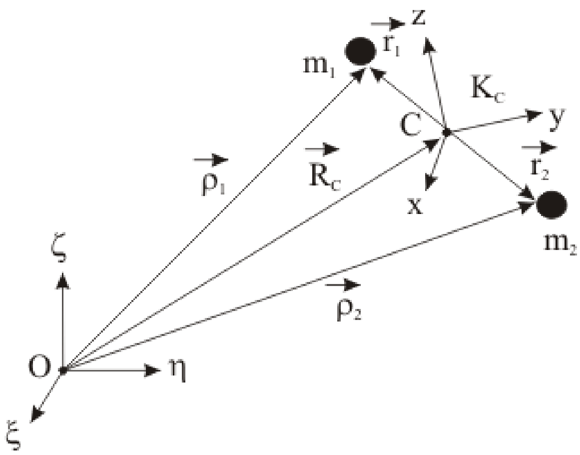
След заместване в (9)

$$m_2al\omega\dot{\varphi}\cos\varphi.\sin\omega t-m_2\,g\,l\sin\varphi-m_2al\omega.\dot{\varphi}\cos\varphi\sin\omega t-m_2al\omega^2\sin\varphi.\cos\omega t-m_2l^2\ddot{\varphi}=0,$$

а след съкращения и разделяне с $(-m_2l)$

(10) $l\ddot{\varphi}+a\omega^2\sin\varphi.\cos\omega t+g\sin\varphi=0$, или още

(11) $l\ddot{\varphi}+(a\omega^2\cos\omega t+g)\sin\varphi=0$.



✸ **Задача 3.11** (*задача за две тела*)

Задачата за движение на **затворена** механична система, състояща се от две взаимодействащи помежду си тела (*материални точки*) се нарича **задача за две тела**. Нека масите на двете тела са съответно m_1 и m_2. Допускаме, че потенциалната енергия на взаимодействие между двете частици е функция **само** на **относителното им разстояние** $r=|\vec{r}_2-\vec{r}_1|$, т.е. $U=U(r)$. Търси се представяне за лагранжиана на системата от тези две тела.

Решение: Движението на системата може да се разглежда като резултат от наслагването на две движения: **(1)** движение на системата от две частици като единно цяло (движение на нейния център на масите C), и **(2)** движение на частиците спрямо техния общ център на масите C.

Спрямо произволно избрана **инерциална лабораторна** отправна система $K_0(O\xi\eta\zeta)$ центърът на масите C се движи праволинейно и равномерно с постоянна скорост $\vec{V}_C=const$. Интерес, следователно, представлява движението от тип (2) на частиците спрямо техния общ център на масите C, т.е. спрямо подвижна координатна система $K_C(Cxyz)$, началото на която е центъра на масите C на частиците m_1 и m_2.

Ако означим радиус-векторите на двете частици спрямо системата K_C със $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$, то функцията на Лагранж за системата от две частици спрямо координатната система K_C ще бъде

(1) $$L = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} - U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|).$$

Удобно е в качеството на **нови координати** да се въведат радиус-вектора на центъра на масите $\vec{R}_C$ и радиус-вектора $\vec{r}$ на първата материална точка спрямо втората (*виж чертежа*), т.е.

(2^а) $$\vec{R}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2},$$

(2^б) $$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

Но спрямо системата $K_C(Cxyz)$ радиус-векторът на центъра на масите е $\boxed{\vec{R}_C = 0}$, следователно за изразяването на $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ посредством $\vec{r}$ получаваме следната **система от уравнения**

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{array}\right. ,$$

решенията на която са

(3) $$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \quad \text{и} \quad \vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}.$$

Замествайки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ от (3) в представянето (1), за лагранжиана на системата получаваме

(4) $$L = \frac{m_1\dot{\vec{r}}_1^{\,2}}{2} + \frac{m_2\dot{\vec{r}}_2^{\,2}}{2} - U(r) = \frac{m_1}{2}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 \dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{m_2}{2}\left(-\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r) =$$

$$= \frac{m_1 m_2^{\,2}}{2(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^{\,2} + \frac{m_2 m_1^{\,2}}{2(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r) = \frac{m_1 m_2(m_1 + m_2)}{2(m_1 + m_2)^2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r) =$$

$$= \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r) = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r),$$

където с $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ е означена т.нар. **приведена маса**.

Така получаваме

(5) $$\boxed{L = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^{\,2} - U(r)}$$

Извод: функцията на Лагранж за двете тела съвпада (*формално*) с тази на **една материална точка** с маса μ, движеща се във външно поле $U(r)$ спрямо началото на координатната система $K_C(Cxyz)$. По такъв начин **задачата за движение на две взаимодействащи си тела бе сведена към задачата за движение на една частица** (*едната от двете*) **с фиктивна маса** μ **във външно централно поле** $U(r)$, създадено от другата от двете частици.

Тема 4А: Движение в централно-симетрично поле.

А) Формули на Бине

Теоретичен минимум: При движение в поле с централна симетрия големината на момента на импулса

(Ф.1) $$M = \left|\vec{M}\right| = mr^2.\dot{\varphi}$$

е запазваща се величина. Това може лесно да се аргументира, като се използва, че по определение моментът на импулса е вектор $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p}$, чиято производна по времето е

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = m\{\dot{\vec{r}} \times \vec{v} + \vec{r} \times \dot{\vec{v}}\} = m\{\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}\} \equiv m\vec{r} \times \vec{a} =$$
$$= \vec{r} \times (m\vec{a}) = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_{\vec{F}},$$

където $\vec{M}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$ е **моментът** на централната сила. Но този момент е тъждествено равен на нула, понеже по определение централната сила лежи върху и е насочена по посока на радиус-вектора $\vec{r}$, т.е. $\vec{F} = F\,\vec{r}_0 = F\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, следователно

$$\vec{M}_{\vec{F}} = \vec{r} \times F\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{F}{|\vec{r}|}(\vec{r} \times \vec{r}) \equiv 0.$$

Щом $\dfrac{d\vec{M}}{dt} = \vec{M}_{\vec{F}}$ и $\vec{M}_{\vec{F}} = 0$, то очевидно $\dfrac{d\vec{M}}{dt} = 0$, т.е. $\vec{M} = const$, к.т.д.

Скоростта на движение на материална точка се изразява посредством съотношението /доказано в Приложение 1 като формула (П.8)/

(Ф.2) $$v^2 = \frac{M^2}{m^2}\left[\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right].$$

Формули на Бине (*доказани в приложение 1*)

(Ф.3) $$M^2\left\{\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2 + \frac{1}{r^2}\right\} = 2m(E - U(r)).$$

(Ф.4) $$F_r = -\frac{M^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right].$$

Тези формули позволяват по зададени момент на импулса M, пълна енергия E, потенциал $U(r)$ или централна сила $F_r = \vec{F}.\vec{e}_r$, където $\vec{F} = -grad\,U(r)$, да се определи уравнението на траекторията на движение (плоска крива).

Понеже $F_r = m.a_r$, то големината на радиалното ускорение a_r, съгласно (Ф.4), е

(Ф.5) $$a_r = -\frac{M^2}{m^2 r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right].$$

При движение в централно поле **площната скорост**

(Ф.6) $$\sigma = \frac{1}{2}r^2.\dot{\varphi}$$

е запазваща се величина, тъй като (*с точност до константа*) тя се изразява чрез съхраняващия се във времето интеграл на движение (Ф.1), т.е. момента на импулса M. Връзката между двете величини се дава с равенството

(Ф.7) $$M = 2m\,\sigma\,.$$

С отчитане на (Ф.7) формулата за скоростта (Ф.2) и за ускорението (Ф.5) добиват вида

(Ф.8) $$v^2 = 4\sigma^2\left[\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right],$$

(Ф.9) $$a_r = -\frac{4\sigma^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right].$$

✷ **Задача 4А.1 (**Стр. 9/Зад. 38**)**

Да се намери ускорението на материална точка, която описва коничното сечение $r = p(1+\varepsilon\cos\varphi)^{-1}$ с постоянна площна скорост σ спрямо фокуса $r = 0$.

Решение: Съгласно условието на задачата частицата се движи по конично сечение с уравнение (*в полярни координати*)

(1) $$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$$

с постоянна площна скорост σ. Ускорението (**чисто радиално**), с което се частицата се движи по равнинната си траектория, съгласно (Ф.9), е

(2) $$a_r = -\frac{4\sigma^2}{r^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right].$$

Вижда се, че за намирането на a_r е достатъчно да изразим $\dfrac{1}{r}$ от (1), и след двукратното му диференциране по φ да заместим в (2):

(3) $$\frac{1}{r} = \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\varepsilon\sin\varphi}{p}, \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{-\varepsilon\cos\varphi}{p},$$

откъдето след заместване в (2) получаваме

(4) $$a_r = -\frac{4\sigma^2}{r^2}\left[\frac{-\varepsilon\cos\varphi}{p} + \frac{1+\varepsilon\cos\varphi}{p}\right] = -\frac{4\sigma^2}{p.r^2}.$$

✷ **Задача 4А.2 (**Стр. 13/Зад.71**)** (*в сборника е решена твърде схематично. Тук е приведено подробно решение*) Материална точка се движи под действието на потенциална, централна сила така, че големината на скоростта ѝ е пропорционална на $1/r$. Да се определят действащата сила и траекторията на материалната точка.

Решение: Съгласно условието скоростта е $v = \dfrac{k}{r}$, следователно пълната енергия е

(1) $$\frac{m}{2}\left(\frac{k}{r}\right)^2 + U(r) = E\,,$$ т.е.

(2) $\quad U(r)=E-\dfrac{m}{2}\dfrac{k^{2}}{r^{2}}$.

Тогава радиалната компонента на силата ще бъде

(3) $\quad F_r=-\dfrac{dU(r)}{dr}=-\dfrac{d}{dr}\left(E-\dfrac{m}{2}\dfrac{k^{2}}{r^{2}}\right)=-\dfrac{mk^2}{r^3}$.

Но съгласно формулата на Бине (Ф.4)

(4) $\quad F_r=-\dfrac{M^2}{mr^2}\left[\dfrac{d^2}{d\varphi^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{1}{r}\right]$,

където M - момент на импулса. От сравняването на десните страни на (3) и (4) получаваме

(5) $\quad -\dfrac{mk^2}{r^3}=-\dfrac{M^2}{mr^2}\left[\dfrac{d^2}{d\varphi^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)+\dfrac{1}{r}\right]$,

откъдето

$$\frac{m^2k^2}{M^2}\frac{1}{r}=\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}, \qquad \text{т.е.}$$

(6) $\quad \dfrac{d^2}{d\varphi^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)=\left(\dfrac{m^2k^2}{M^2}-1\right)\dfrac{1}{r}$.

Ако означим

(7) $\quad \alpha^2=\dfrac{m^2k^2}{M^2}-1$,

и направим полагането

(8) $\quad u=\dfrac{1}{r}$,

то (6) ще добие вида

(9) $\quad \dfrac{d^2u}{d\varphi^2}-\alpha^2u=0$.

Търсим решение на това ЛХОДУ от II ред във вида

(10) $\quad u(\varphi)=e^{\lambda\varphi}, \qquad \Rightarrow \qquad \dfrac{du}{d\varphi}=\lambda e^{\lambda\varphi}, \qquad \dfrac{d^2u}{d\varphi^2}=\lambda^2 e^{\lambda\varphi}$.

След заместване на производните в (9) се получава характеристичното уравнение $\lambda^2-\alpha^2=0$, чиито два реални корена са $\lambda_{1,2}=\pm\alpha$. С отчитането на този факт общото решение на (9) се дава с

(11) $\quad u(\varphi)=C_1e^{\lambda_1\cdot\varphi}+C_2e^{\lambda_2\cdot\varphi}$,

или още след възстановяване на $r(\varphi)$ от (8) получаваме окончателно

(12) $\quad \dfrac{1}{r(\varphi)}=C_1e^{\alpha.\varphi}+C_2e^{-\alpha.\varphi}, \qquad$ където $\quad \alpha=\sqrt{\dfrac{m^2k^2}{M^2}-1}$.

✸ **Задача 4А.3 (**Стр. 14/Зад. 74**)**

Да се определи траекторията на материална точка, движеща се под действието на централната сила $\vec{F}_r=mr^{-2}(\alpha+\beta\cos2\varphi)\,\vec{e}_r$.

Решение: При зададената в условието на задачата централна сила

(1) $\vec{F}_r = \frac{m}{r^2}(\alpha + \beta\cos 2\varphi)\,\vec{e}_r$

е удачно да се използва формулата на Бине (Ф.4), т.е.

$$\vec{F}_r = -\frac{M^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right]\vec{e}_r\,.$$

От сравняването на десните страни на горните две формули произтича следното ОДУ, описващо в полярни координати **траекторията на движение**

(2) $-\frac{M^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right] = \frac{m}{r^2}(\alpha + \beta\cos 2\varphi)\,,$

или още

(3) $\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = -\frac{m^2}{M^2}(\alpha + \beta\cos 2\varphi)\,.$

Ако положим

(4) $u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)}$

то горното уравнение добива вида

(5) $\frac{d^2u(\varphi)}{d\varphi^2} + u(\varphi) = -\frac{m^2}{M^2}(\alpha + \beta\cos 2\varphi)$

В този си вид уравнението на траекторията представлява **нехомогенно** ЛОДУ от II ред, чието общо решение се представя във вида

(6) $u(\varphi) = \tilde{u}(\varphi) + u_0(\varphi)\,,$

където

- ☞ $\tilde{u}(\varphi)$ - **общо** решение на съответното на (5) ЛХОДУ;
- ☞ $u_0(\varphi)$ - **частно** решение на нехомогенното ЛОДУ (5).

Съответното на (5) ЛХОДУ има характеристично уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$, чиито корени са $\lambda_{1,2} = \pm i$, следователно общото решение на това съответно ЛХОДУ е

(7) $\tilde{u}(\varphi) = C_1^{/}e^{i\varphi} + C_2^{/}e^{-i\varphi} = C_1^{/}(\cos\varphi + i\sin\varphi) + C_2^{/}(\cos\varphi - i\sin\varphi) =$

$$= (C_1^{/} + C_2^{/})\cos\varphi + i(C_1^{/} - C_2^{/})\sin\varphi \equiv C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi\,.$$

За намиране на едно **частно решение** на нехомогенното ЛОДУ прилагаме **метода на полагането**, като за целта търсим това решение във вида

(8) $u_0(\varphi) = A + B\cos 2\varphi\,,$

където A и B са две **подлежащи на определяне константи**. Те се избират така, че (8) да удовлетворява (5) тъждествено. За целта намираме втора производна на $u_0(\varphi)$ и заместваме в (5):

$$u_0^{/}(\varphi) = -2B\sin 2\varphi\,, \qquad u_0^{//}(\varphi) = -2.2B\cos 2\varphi = -4B\cos 2\varphi\,,$$

а след заместване в (5) получаваме

(9) $-4B\cos 2\varphi + (A + B\cos 2\varphi) = -\frac{m^2}{M^2}(\alpha + \beta\cos 2\varphi)$, или още

(10) $-3B\cos 2\varphi + A = -\frac{m^2}{M^2}\alpha - \frac{m^2\beta}{M^2}\cos 2\varphi$

От сравняването на свободните членове и коефициентите пред $\cos 2\varphi$ от двете страни на горното равенство, получаваме следните съотношения

$$(11)\qquad \left|\begin{aligned} -3B &= -\frac{m^2\beta}{M^2} \\ A &= -\frac{m^2}{M^2}\alpha \end{aligned}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left|\begin{aligned} B &= \frac{m^2\beta}{3M^2} \\ A &= -\frac{m^2}{M^2}\alpha \end{aligned}\right. .$$

С така намерените коефициенти A и B заместваме в (8), и за частното решение получаваме представянето

$$(12)\qquad u_0(\varphi) = A + B\cos 2\varphi = -\frac{m^2}{M^2}\alpha + \frac{1}{3}\frac{m^2}{M^2}\beta\cos 2\varphi .$$

Накрая определяме общото решение (*уравнението на траекторията*) във вида

$$(13)\qquad \frac{1}{r(\varphi)} = \tilde{u}(\varphi) + u_0(\varphi) = C_1\cos\varphi + C_2\sin\varphi - \frac{m^2}{M^2}\alpha + \frac{1}{3}\frac{m^2}{M^2}\beta\cos 2\varphi$$

✸ **Задача 4А.4 (**Стр. 14/Зад. 75**)**

Да се намери траекторията на материална точка, която се движи под действието на централната сила

$$(1)\qquad \vec{F}_r = -k.r^{-4}\,\vec{e}_r \quad (k>0),$$

при следните начални условия

$$(2)\qquad r(0) = a; \qquad \varphi(0) = 0; \qquad \vec{v}(0) = \sqrt{\frac{2k}{3ma^3}}\,\vec{e}_\varphi .$$

Решение: По дефиниция връзката между сила и потенциал на полето, породен от тази сила, се дава с

$$(3)\qquad \vec{F}_r = -grad\,U(r) = -\frac{dU}{dr}\,grad\;r = -\frac{dU}{dr}\vec{e}_r .$$

От сравняването на представянията (1) и (3) за радиалната сила следва равенството

$$(4)\qquad \frac{dU}{dr} = \frac{k}{r^4}, \text{ или още } dU = \frac{k}{r^4}dr,$$

интегрирането на което дава следното представяне за потенциала (*в явен вид*)

$$(5)\qquad U(r) = -\frac{k}{3}\frac{1}{r^3} + const .$$

Интеграционната константа определяме от началните условия (2) при $t=0$:

$$(6)\qquad U[r(0)] = E - T(0) = E - \frac{m}{2}v^2(0) = E - \frac{m}{2}\frac{2k}{3ma^3} = E - \frac{k}{3a^3} .$$

Ако заместим (6) в лявата, а $r=a$ - в дясната страна на (5), ще получим

$$(7)\qquad E - \frac{k}{3a^3} = -\frac{k}{3}\frac{1}{a^3} + const, \qquad \Rightarrow \qquad const = E .$$

По този начин представянето (5) за потенциала добива вида

$$(8)\qquad U(r) = E - \frac{k}{3}\frac{1}{r^3},$$

откъдето следва

$$(9)\qquad E - U(r) = \frac{k}{3r^3} .$$

С така получената стойност за $E-U(r)$ заместваме във формулата на Бине (Ф.3)

$$M^2\left\{\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\frac{1}{r^2}\right\}=2m(E-U(r)),$$

в резултат на което получаваме

$$(10)\qquad M^2\left\{\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\frac{1}{r^2}\right\}=2m\frac{k}{3r^3},$$ където M – момент на импулса.

Полученото по този начин ОДУ относно функцията $r=r(\varphi)$ описва търсеното уравнение на траекторията. В (10) правим следната поредица от елементарни преобразувания

$$\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\frac{1}{r^2}=\frac{2m}{M^2}\frac{k}{3r^3},$$

$$\left[-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right]^2+\frac{1}{r^2}=\frac{2mk}{3M^2}\frac{1}{r^3}\qquad\Big|.r^4$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2=\frac{2mk}{3M^2}r,$$

откъдето следва

$$(11)\qquad \frac{dr}{d\varphi}=\sqrt{\frac{2mk}{3M^2}r-r^2}\ .$$

Горното ДУ с разделени променливи може да се опрости, ако моментът на импулса M се изрази чрез началните условия. Действително, щом съгласно ЗЗМИ $M=const$, то $M(t)=M(0)$, следователно

$$(12)\qquad M^2(t)\equiv M^2=M^2(0)=[m.r(0).v(0)]^2=m^2a^2\frac{2k}{3ma^3}=\frac{2km}{3a}.$$

Заместваме M^2 от (12) в (11)

$$(13)\qquad \frac{dr}{d\varphi}=\sqrt{\frac{2mk.3a}{3.2km}r-r^2}=\sqrt{a.r-r^2},$$

откъдето

$$d\varphi=\frac{dr}{\sqrt{a.r-r^2}}=\frac{dr}{\sqrt{r}\sqrt{a}\sqrt{1-\frac{r}{a}}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}r^{-\frac{1}{2}}dr}{\sqrt{1-\frac{r}{a}}}=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\frac{\frac{1}{\sqrt{a}}dr^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-\frac{r}{a}}}=2\frac{d\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)^2}},\text{ т.е.}$$

$$(14)\qquad d\varphi=-2\left\{-\frac{d\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{r}{a}}\right)^2}}\right\}.$$

След интегриране на (14), отчитайки че $\varphi(0)=0$, получаваме

(15) $\varphi = -2arc\cos\sqrt{\dfrac{r}{a}}$, или още $-\dfrac{\varphi}{2} = arc\cos\sqrt{\dfrac{r}{a}}$,

откъдето следва

(16) $\sqrt{\dfrac{r}{a}} = \cos\left(-\dfrac{\varphi}{2}\right) \equiv \cos\dfrac{\varphi}{2}$

Повдигаме в квадрат двете страни на (16)

(17) $\dfrac{r}{a} = \cos^2\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{1+\cos\varphi}{2}$,

или окончателно

(18) $r(\varphi) = a.\dfrac{1+\cos\varphi}{2}$.

В полярни координати уравнението на траекторията (18) е уравнение на т.нар. „*кардиоида*" (*забележителна крива*).

✸ **Задача 4А.5 (**Стр. 14/Зад. 76**)**

Да се намери траекторията на материална точка, която се движи под действието на централната сила

(1) $\vec{F}_r = -k.r^{-7}\,\vec{e}_r \quad (k>0)$,

при следните начални условия

(2) $r(0) = a$; $\varphi(0) = 0$; $\vec{v}(0) = \sqrt{\dfrac{k}{3ma^6}}\,\vec{e}_\varphi$.

Решение: По дефиниция връзката между сила и потенциал на полето, породено от тази сила, се дава с

(3) $\vec{F}_r = -grad\,U(r) = -\dfrac{dU}{dr}grad\; r = -\dfrac{dU}{dr}\vec{e}_r$.

От сравняването на представянията (1) и (3) за радиалната сила следва равенството

(4) $\dfrac{dU}{dr} = \dfrac{k}{r^7}$, или още $dU = \dfrac{k}{r^7}dr$,

интегрирането на което дава следното представяне за потенциала (*в явен вид*)

(5) $U(r) = -\dfrac{k}{6}\dfrac{1}{r^6} + const$.

Интеграционната константа определяме от началните условия (2) при $t=0$:

(6) $U[r(0)] = E - T(0) = E - \dfrac{m}{2}v^2(0) = E - \dfrac{m}{2}\dfrac{k}{3ma^6} = E - \dfrac{k}{6a^6}$.

Ако заместим (6) в лявата, а $r=a$ - в дясната страна на (5), ще получим

(7) $E - \dfrac{k}{6a^6} = -\dfrac{k}{6}\dfrac{1}{a^6} + const$, $\Rightarrow$ $const = E$.

По този начин представянето (5) за потенциала добива вида

(8) $U(r) = E - \dfrac{k}{6}\dfrac{1}{r^6}$,

откъдето следва

(9) $E - U(r) = \dfrac{k}{6r^6}$.

С така получената стойност за $E-U(r)$ заместваме във формулата на Бине (Ф.3)

$$M^2\left\{\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\frac{1}{r^2}\right\}=2m(E-U(r)),$$

в резултат на което получаваме

(10) $$M^2\left\{\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\frac{1}{r^2}\right\}=2m\frac{k}{6r^6},$$ където M – момент на импулса.

Полученото по този начин ОДУ относно функцията $r=r(\varphi)$ описва търсеното уравнение на траекторията. В (10) правим следната поредица от елементарни преобразувания

$$\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\frac{1}{r^2}=\frac{mk}{3M^2}\frac{1}{r^6},$$

$$\left[-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right]^2+\frac{1}{r^2}=\frac{mk}{3M^2}\frac{1}{r^6} \qquad \Big| .r^4$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+r^2=\frac{mk}{3M^2}\frac{1}{r^2},$$

откъдето следва

(11) $$\frac{dr}{d\varphi}=\sqrt{\frac{mk}{3M^2}\frac{1}{r^2}-r^2}.$$

Горното ДУ с разделени променливи може да се опрости, ако запазващият се момент на импулса M се изрази чрез началните условия. Действително, щом съгласно ЗЗМИ $M=const$, то $M(t)=M(0)$, следователно

(12) $$M^2(t)\equiv M^2=M^2(0)=[m.r(0).v(0)]^2=m^2a^2\frac{k}{3ma^6}=\frac{km}{3a^4}.$$

Заместваме M^2 от (12) в (11)

(13) $$\frac{dr}{d\varphi}=\sqrt{\frac{mk.3a^4}{3.km}\frac{1}{r^2}-r^2}=\sqrt{\frac{a^4}{r^2}-r^2}=\frac{a^2}{r}\sqrt{1-\frac{r^4}{a^4}},$$

откъдето

$$d\varphi=\frac{dr}{\frac{a^2}{r}\sqrt{1-\frac{r^4}{a^4}}}=\frac{\frac{r}{a^2}dr}{\sqrt{1-\frac{r^4}{a^4}}}=\frac{1}{2}\frac{d\left(\frac{r^2}{a^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{r^2}{a^2}\right)^2}},$$ т.е.

(14) $$d\varphi=-\frac{1}{2}\left\{-\frac{d\left(\frac{r^2}{a^2}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{r^2}{a^2}\right)^2}}\right\}.$$

След интегриране на (14), отчитайки че $\varphi(0)=0$, получаваме

(15) $\varphi = -\dfrac{1}{2} arc\cos\left(\dfrac{r^2}{a^2}\right)$, или още $(-2\varphi) = arc\cos\left(\dfrac{r^2}{a^2}\right)$,

откъдето следва

(16) $\dfrac{r^2}{a^2} = \cos(-2\varphi) = \cos 2\varphi$

Така за уравнението на движение в полярни координати получаваме

(17) $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$,

В полярни координати уравнението на траекторията (17) е уравнение на т.нар. „*лемниска на Бернули*" (*забележителна крива*).

📖

Тема 4.Б: Движение в централно-симетрично поле.

Б) Интегрални представяния на уравнението на движението и уравнението на траекторията

Теоретичен минимум: В полярни координати радиус-векторът на материална точка е

(Ф.1) $\vec{r} = r.\vec{e}_r$,

а скоростта й е

(Ф.2) $\vec{v} = \dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$,

Моментът на импулса на материалната точка се дава с

(Ф.3) $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{p} = (r.\vec{e}_r) \times m(\dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = r.\dot{r}\,m(\vec{e}_r \times \vec{e}_r) + r^2.\dot{\varphi}m(\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi) =$
$= r^2.\dot{\varphi}m(\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi) = mr^2.\dot{\varphi}\,\vec{e}_z$,

а големината на момента на импулса е

(Ф.4) $M = \left|\vec{M}\right| = mr^2.\dot{\varphi}$.

При движение в централно-симетрично поле е в сила **законът за запазване на енергията**

(Ф.5) $E = T + U = \dfrac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = const$,

който може да се представи още във вида

(Ф.6) $E = \dfrac{m}{2}\dot{r}^2 + \dfrac{m}{2}r^2\dot{\varphi}^2 + U(r)$,

или с отчитането на (Ф.4), т.е. на

(Ф.7) $\dfrac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi} = \dfrac{M}{mr^2}$,

ще имаме

(Ф.8) $E = \dfrac{m}{2}\dot{r}^2 + \dfrac{m}{2}r^2\left(\dfrac{M}{mr^2}\right)^2 + U(r) = \dfrac{m}{2}\dot{r}^2 + \dfrac{M^2}{2mr^2} + U(r)$.

Ако се въведе т.нар. **ефективна потенциална енергия**

(Ф.9) $U_{еф}(r) = U(r) + \dfrac{M^2}{2mr^2}$,

то изразът (Ф.5) за пълната механична енергия добива вида

(Ф.10) $E = \dfrac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$.

Величината $\frac{M^2}{2mr^2}$, фигурираща в израза (Ф.9) за ефективния потенциал $U_{еф}(r)$, е прието да се нарича **центробежен потенциал**. Тя дава тази част от енергията на частицата, която е свързана с нейното въртене около силовия център.

Очевидно уравнението за пълната енергия (Ф.8) може да се представи във следния удобен за интегриране вид

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left[E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right],$$

или още

$$\text{(Ф.11)} \qquad \dot{r} \equiv \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right]}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}\right]}},$$

откъдето

$$\text{(Ф.12)} \qquad dt = \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}} \; .$$

Интегрирайки, получаваме **уравнението на движение** $\boxed{r = r(t)}$:

$$\text{(Ф.13)} \qquad \boxed{t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}} + t_0}.$$

А за да получим **уравнението на траекторията** $\boxed{r = r(\varphi)}$, трябва да елиминираме времето. За целта използваме, че съгласно (Ф.4) $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{mr^2}$, т.е. $d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt$. Следователно ако умножим двете страни на (Ф.12) с $\frac{M}{mr^2}$, ще получим

$$d\varphi = \frac{M}{mr^2} dt = \frac{M}{m}\sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{r^2 . \sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}} = \frac{M}{\sqrt{2m}} \frac{dr}{r^2 . \sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}}, \text{ т.е.}$$

$$\text{(Ф.14)} \qquad d\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m}} \frac{dr}{r^2 . \sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}},$$

интегрирането на което дава търсеното **уравнение на траекторията**

$$\text{(Ф.15)} \qquad \boxed{\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 . \sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}} + \varphi_0}.$$

✸ **Задача 4Б.1**

(*Кеплерова задача*) това е задача за движение на материална точка в **централно поле** с потенциал (**кулонов потенциал**)

(1) $U(r) = -\dfrac{\alpha}{r}$,

където $\alpha > 0$ съответства на сила на привличане (**гравитация**, напр.), а $\alpha < 0$ съответства на сила на отблъскване.

***Допълнение**: силата, „съответстваща” на кулонов потенциал, е

$$\vec{F} = -gradU(r) = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{\alpha}{r}\right)grad\, r = \alpha\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{r}_0,$$

която при $\alpha > 0$ очевидно е централна сила на привличане, защото е насочена по направление ($-\vec{r}_0$) към силовия център, а големината ѝ е $F_r = \dfrac{\alpha}{r^2}$, т.е. нютонова гравитационна сила.

Решение: Нека намерим уравнението на траекторията при движение в такова поле. За целта използваме (Ф.15)

$$\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2.\sqrt{E-U(r)-\dfrac{M^2}{2mr^2}}}+\varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int\frac{dr}{r^2.\sqrt{E-\left(-\dfrac{\alpha}{r}\right)-\dfrac{M^2}{2mr^2}}}+\varphi_0 =$$

$$= M\int\frac{1}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{2mE+2m\alpha\dfrac{1}{r}-M^2\dfrac{1}{r^2}}}+\varphi_0 .$$

Нека положим $u = \dfrac{1}{r}$, следователно $dr = -\dfrac{1}{u^2}du \equiv -u^{-2}du$. Така горният интеграл добива вида

$$\varphi = -M\int\frac{du}{\sqrt{2mE+2m\alpha u-M^2u^2}}+\varphi_0 = -M\int\frac{du}{\sqrt{-M^2u^2+2m\alpha u+2mE}}+\varphi_0$$

Изразът под радикала в знаменателя представлява квадратен тричлен au^2+bu+c, където $a = -M^2$, $b = 2m\alpha$ и $c = 2mE$. Затова нека направим второ полагане: $u = x-\dfrac{b}{2a} = x-\dfrac{2m\alpha}{2.(-M^2)} = x+\dfrac{m\alpha}{M^2}$, като очевидно $du = dx$. Така функцията под радикала ще се представи във вида

$$-M^2u^2+2m\alpha u+2mE = -M^2\left(x+\frac{m\alpha}{M^2}\right)^2+2m\alpha\left(x+\frac{m\alpha}{M^2}\right)+2mE =$$

$$= -M^2x^2-M^2.2x.\frac{m\alpha}{M^2}-M^2.\left(\frac{m\alpha}{M^2}\right)^2+2m\alpha x+2m\alpha.\frac{m\alpha}{M^2}+2mE =$$

$$= -M^2x^2-2m\alpha x-M^2.\frac{m^2\alpha^2}{M^4}+2m\alpha x+2\frac{m^2\alpha^2}{M^2}+2mE =$$

$$= -M^2x^2-\frac{m^2\alpha^2}{M^2}+2\frac{m^2\alpha^2}{M^2}+2mE = -M^2x^2+\frac{m^2\alpha^2}{M^2}+2mE =$$

$$=\frac{1}{M^2}[-M^4x^2+m^2\alpha^2+2mM^2E].$$

Подинтегралната функция при това полагане ще добие вида

$$\frac{1}{\sqrt{-M^2u^2+2m\alpha u+2mE}}=\frac{1}{\frac{1}{M}\sqrt{-M^4x^2+m^2\alpha^2+2mM^2E}}=$$

$$\equiv\frac{M}{\sqrt{(m^2\alpha^2+2mM^2E)-M^4x^2}}.$$

Ако означим $(m^2\alpha^2+2mM^2E)=P^2$, след което изнесем P^2 извън радикала, то подинтегралната функция ще стане

$$\frac{1}{\sqrt{-M^2u^2+2m\alpha u+2mE}}=\ldots=\frac{M}{|P|\sqrt{1-\frac{M^4x^2}{P^2}}}=\frac{M}{|P|\sqrt{1-\left(\frac{M^2x}{P}\right)^2}}.$$

Заместваме я в интеграла и получаваме

$$\varphi=-M\int\frac{du}{\sqrt{2mE+2m\alpha u-M^2u^2}}+\varphi_0=-M\int\frac{M\ dx}{|P|\sqrt{1-\left(\frac{M^2x}{P}\right)^2}}+\varphi_0=$$

$$=-\int\frac{M^2\ dx}{|P|\sqrt{1-\left(\frac{M^2x}{P}\right)^2}}+\varphi_0=-\int\frac{d\left(\frac{M^2x}{P}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{M^2x}{P}\right)^2}}+\varphi_0.$$

И така

$$\varphi-\varphi_0=-\int\frac{d\left(\frac{M^2x}{P}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{M^2x}{P}\right)^2}}.$$

Ако използваме табличния интеграл $-\int\frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}=\arccos\xi$, получаваме

$$\varphi-\varphi_0=\arccos\left(\frac{M^2x}{P}\right),$$

откъдето следва

$$\frac{M^2x}{P}=\cos(\varphi-\varphi_0),$$

или още $\frac{M^2x}{P}=\cos\varphi$, ако приемем нулеви начални условия (т.е. $\varphi_0=0$).

Връщаме се назад по направените полагания:

$u = x + \dfrac{m\alpha}{M^2}$, $\Rightarrow$ $x = u - \dfrac{m\alpha}{M^2}$, както и $r = \dfrac{1}{u}$, $\Rightarrow$ $u = \dfrac{1}{r}$, и следователно ще имаме $x = \dfrac{1}{r} - \dfrac{m\alpha}{M^2}$. Заместваме в намереното решение, отчитайки още, че $P^2 = (m^2\alpha^2 + 2mM^2E)$, т.е. $P = \sqrt{m^2\alpha^2 + 2mM^2E}$:

$$\frac{M^2}{\sqrt{m^2\alpha^2 + 2mM^2E}}\left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{M^2}\right) = \cos\varphi,$$

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{m\alpha}{M^2}\right) = \frac{\sqrt{m^2\alpha^2 + 2mM^2E}}{M^2}\cos\varphi,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{M^2} + \frac{m\alpha\sqrt{1 + \dfrac{2mM^2E}{m^2\alpha^2}}}{M^2}\cos\varphi,$$

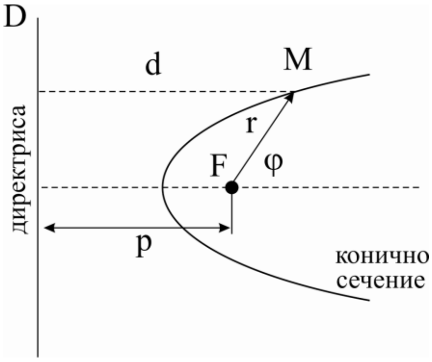
$$\frac{1}{r} = \frac{m\alpha}{M^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2M^2E}{m\alpha^2}}\ \cos\varphi\right].$$

Ако положим $\dfrac{1}{p} = \dfrac{m\alpha}{M^2}$, т.е. $p = \dfrac{M^2}{m\alpha}$, и $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2M^2E}{m\alpha^2}}$, то горното уравнение добива вида

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \varepsilon.\cos\varphi), \quad \text{или още} \quad r(1 + \varepsilon.\cos\varphi) = p = const,$$

което представлява **уравнение на конично сечение**.

В зависимост от стойността на пълната енергия на частицата ще имаме следните случаи (*траектории на движение*), определящи се от **ексцентрицитета** $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{2M^2E}{m\alpha^2}}$:



☞ при $E > 0$, т.е. $\varepsilon > 1$ ще имаме **инфинитно** движение по **хипербола**;

☞ при $E = 0$, т.е. $\varepsilon = 1$ ще имаме **инфинитно** движение по **парабола**;

☞ при $E < 0$, т.е. $\varepsilon < 1$ ще имаме **финитно** движение по **елипса**.

На фигурата е представено конично сечение, представляващо ГМТ, за които отношението

$$\frac{r}{d} = \varepsilon = const,$$

където: p - **фокален параметър**, ε - **ексцентрицитет**.

✸ **Задача 4Б.2 (**Стр. 14/Зад. 82**)**

Да се намери закона за движение (*и уравнението на траекторията*) на материална точка в централното поле

(1) $U(r) = \dfrac{\alpha}{r^2}$, $(\alpha > 0)$.

Решение: Ефективният потенциал на полето, действащ върху материалната точка, е

$$(2) \qquad U_{еф}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = \frac{\alpha}{r^2} + \frac{M^2}{2mr^2} = \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)\frac{1}{r^2}.$$

а) определяне закона за движението:

Законът за движение се дава с (Ф.13)

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dr}{\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}} + t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dr}{\sqrt{E - \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)\frac{1}{r^2}}} + t_0 .$$

Ако изнесем $\frac{1}{r^2}$ извън радикала в знаменателя, ще имаме

$$(3) \qquad t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dr}{\frac{1}{r}\sqrt{E.r^2 - \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)}} + t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{r\,dr}{\sqrt{E.r^2 - \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)}} + t_0 =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{2}}\int \left[E.r^2 - \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} d(r^2) + t_0 = \frac{1}{2E}\sqrt{\frac{m}{2}}\int \left[E.r^2 - \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} d(Er^2) + t_0 =$$

$$= \frac{1}{2E}\sqrt{\frac{m}{2}}\int \left[E.r^2 - \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} d\left[Er^2 - \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)\right] + t_0 =$$

$$= \frac{1}{2E}\sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}\left[E.r^2 - \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)\right]^{+\frac{1}{2}} + t_0 = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{E.r^2 - \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)} + t_0 .$$

И така, законът на движение на материалната точка в полето (1) се дава с

$$(4) \qquad t = \frac{1}{E}\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{E.r^2 - \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)} + t_0 ,$$

което (*след повдигане в квадрат*) може да бъде решено относно r, с което зависимостта $r = r(t)$ може да бъде представена (*ако това е възможно*) в **явен аналитичен вид**.

б) определяне уравнението на траекторията $r = r(\varphi)$:

Уравнението на траекторията се дава с (Ф.15)

$$\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int \frac{dr}{r^2.\sqrt{E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2}}} + \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int \frac{\frac{1}{r^2}dr}{\sqrt{E - \left(\alpha + \frac{M^2}{2m}\right)\frac{1}{r^2}}} + \varphi_0 .$$

За решаването на този интеграл правим полагането

$$(5) \qquad u = \frac{1}{r}, \text{ следователно } dr = -\frac{1}{u^2}du .$$

След заместване в горното уравнение получаваме

(6) $$\varphi=\frac{M}{\sqrt{2m}}\int\frac{u^2.(-u^{-2})\,du}{\sqrt{E-\left(\alpha+\frac{M^2}{2m}\right)u^2}}+\varphi_0=-\frac{M}{\sqrt{2m}}\int\frac{du}{\sqrt{E-\left(\alpha+\frac{M^2}{2m}\right)u^2}}+\varphi_0\,.$$

Нека означим (*за удобство при изчисленията и записите*)

(7) $$\alpha+\frac{M^2}{2m}=A^2.$$

Ако освен това изнесем E извън радикала в знаменателя, то (6) добива вида

(8) $$\varphi=-\frac{M}{\sqrt{2m}}\int\frac{du}{\sqrt{E}\sqrt{1-\left(\frac{A.u}{\sqrt{E}}\right)^2}}+\varphi_0=-\frac{M}{\sqrt{2m}}\frac{1}{|A|}\int\frac{\frac{1}{\sqrt{E}}|A|du}{\sqrt{1-\left(\frac{A.u}{\sqrt{E}}\right)^2}}+\varphi_0=$$

$$=-\frac{M}{\sqrt{2m}}\frac{1}{|A|}\int\frac{d\left(\frac{|A|.u}{\sqrt{E}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{|A|.u}{\sqrt{E}}\right)^2}}+\varphi_0=\frac{M}{\sqrt{2m}}\frac{1}{|A|}\left\{-\int\frac{d\left(\frac{|A|.u}{\sqrt{E}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{|A|.u}{\sqrt{E}}\right)^2}}\right\}+\varphi_0\,.$$

Ако използваме табличния интеграл $-\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\arccos y$, то горният резултат се представя във вида

(9) $$\varphi=\frac{M}{\sqrt{2m}}\frac{1}{|A|}\arccos\left(\frac{|A|.u}{\sqrt{E}}\right)+\varphi_0,$$

или още

(10) $$\arccos\left(\frac{|A|.u}{\sqrt{E}}\right)=\frac{\sqrt{2m}\,|A|}{M}(\varphi-\varphi_0)\qquad\Big|\cos$$

(11) $$\frac{|A|.u}{\sqrt{E}}=\cos\left\{\frac{\sqrt{2m}\,|A|}{M}(\varphi-\varphi_0)\right\}$$

След отчитане на полаганията (5) и (7) този резултат добива вида

$$\frac{\sqrt{\alpha+\frac{M^2}{2m}}}{\sqrt{E}}\frac{1}{r}=\cos\left\{\frac{\sqrt{2m}\,\sqrt{\alpha+\frac{M^2}{2m}}}{M}(\varphi-\varphi_0)\right\},\text{ или}$$

$$\frac{\sqrt{2\alpha\,m+M^2}}{\sqrt{2mE}}.\frac{1}{r}=\cos\left\{\frac{\sqrt{2\alpha\,m+M^2}}{M}(\varphi-\varphi_0)\right\},\text{ откъдето}$$

(12) $$\frac{1}{r}=\frac{\sqrt{2mE}}{\sqrt{2\alpha\,m+M^2}}\cos\left\{\sqrt{1+\frac{2\alpha\,m}{M}}\,(\varphi-\varphi_0)\right\}.$$

Това е търсеното уравнение на траекторията, тъй като посредством него се задава зависимостта $r=r(\varphi)$, която (*в полярни координати*) е уравнение на равнинната крива, по която се движи материалната точка под действието на силовия потенциал (1).

✸ **Задача 4Б.3 (**Стр. 15/Зад. 87**)**

Да се намери уравнението на траекторията на материална точка, движеща се в централното поле

(1) $$U(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}, \ (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Решение: Ефективният потенциал на полето, действащо върху материалната точка, е

(2) $$U_{еф}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2} = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2} + \frac{M^2}{2mr^2} = \frac{\alpha}{r} + \left(\beta + \frac{M^2}{2m}\right)\frac{1}{r^2} = \frac{\alpha}{r} + \frac{B^2}{r^2},$$

където е въведено означението

(3) $$\beta + \frac{M^2}{2m} = B^2$$

Уравнението на траекторията се дава с (Ф.15)

$$\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int \frac{dr}{r^2.\sqrt{E - U_{eff}(r)}} + \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int \frac{\frac{1}{r^2}dr}{\sqrt{E - \left(\frac{\alpha}{r} + \frac{B^2}{r^2}\right)}} + \varphi_0 .$$

За решаването на този интеграл правим полагането

(4) $u = \frac{1}{r}$, следователно $dr = -\frac{1}{u^2}du$.

След заместване в по-горното уравнение получаваме

(5) $$\varphi = \frac{M}{\sqrt{2m}}\int \frac{u^2.(-u^{-2})\,du}{\sqrt{E - \alpha.u - B^2u^2}} + \varphi_0 = -\frac{M}{\sqrt{2m}}\int \frac{du}{\sqrt{E - \alpha.u - B^2u^2}} + \varphi_0 .$$

Изразът под радикала в знаменателя представлява квадратен тричлен $au^2 + bu + c$, където $a = -B^2$, $b = -\alpha$ и $c = E$. Затова правим второ полагане: $u = x - \frac{b}{2a} = x - \frac{-\alpha}{2.(-B^2)} = x - \frac{\alpha}{2B^2}$, като очевидно $du = dx$. Така функцията под радикала ще се представи във вида

$$E - \alpha.u - B^2u^2 = E - \alpha.\left(x - \frac{\alpha}{2B^2}\right) - B^2\left(x - \frac{\alpha}{2B^2}\right)^2 =$$

$$= E - \alpha.x + \frac{\alpha^2}{2B^2} - B^2\left(x^2 - 2x\frac{\alpha}{2B^2} + \frac{\alpha^2}{4B^4}\right) = E - \alpha.x + \frac{\alpha^2}{2B^2} - B^2x^2 + 2x\frac{\alpha}{2B^2}B^2 - \frac{\alpha^2B^2}{4B^4} =$$

$$= E - \alpha.x + \frac{\alpha^2}{2B^2} - B^2x^2 + \alpha.x - \frac{\alpha^2}{4B^2} = E + \frac{\alpha^2}{4B^2} - B^2x^2 = \frac{1}{4B^2}(4B^2E + \alpha^2 - 4B^4x^2)$$

Подинтегралната функция ще стане

$$\frac{1}{\sqrt{E - \alpha.u - B^2u^2}} = \frac{2|B|}{\sqrt{4B^2E + \alpha^2 - 4B^4x^2}}.$$

Нека означим (*за удобство*)

(6) $$4B^2E + \alpha^2 = C^2.$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{2|B|}{\sqrt{4B^2E+\alpha^2-4B^4x^2}}=\frac{2|B|}{|C|\sqrt{1-\left(\dfrac{2B^2x}{C}\right)^2}}=\frac{1}{|B|}\frac{\dfrac{2B^2}{|C|}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2B^2x}{|C|}\right)^2}}\,.$$

След всички тези предварителни преобразования заместваме подинтегралната функция в (5) и получаваме

$$\varphi=-\frac{M}{\sqrt{2m}}\frac{1}{|B|}\int\frac{d\left(\dfrac{2B^2x}{|C|}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2B^2x}{|C|}\right)^2}}+\varphi_0=\frac{M}{\sqrt{2m}}\frac{1}{|B|}\left\{-\int\frac{d\left(\dfrac{2B^2x}{|C|}\right)}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2B^2x}{|C|}\right)^2}}\right\}+\varphi_0\text{, т.е.}$$

$$\varphi=\frac{M}{|B|\sqrt{2m}}\arccos\left(\frac{2B^2x}{|C|}\right)+\varphi_0\,,$$

откъдето $\arccos\left(\dfrac{2B^2x}{|C|}\right)=\dfrac{|B|\sqrt{2m}}{M}(\varphi-\varphi_0)$, или

$$\frac{2B^2x}{|C|}=\cos\left[\frac{|B|\sqrt{2m}}{M}(\varphi-\varphi_0)\right]\text{, т.е.}$$

$$(6) \qquad x=\frac{|C|}{2B^2}\cos\left[\frac{|B|\sqrt{2m}}{M}(\varphi-\varphi_0)\right].$$

Нека възстановим всички величини от направените дотук полагания (3), (4) и (6), а именно:

$$B^2=\beta+\frac{M^2}{2m} \qquad \Rightarrow \qquad |B|=\sqrt{\beta+\frac{M^2}{2m}}\,,$$

$$C^2=4B^2E+\alpha^2 \qquad \Rightarrow \qquad |C|=\sqrt{\alpha^2+4E\left(\beta+\frac{M^2}{2m}\right)}=\alpha\sqrt{1+\frac{4E}{\alpha^2}\left(\beta+\frac{M^2}{2m}\right)},$$

$$u=x-\frac{\alpha}{2B^2} \qquad \Rightarrow \qquad x=u+\frac{\alpha}{2B^2}=\frac{1}{r}+\frac{\alpha}{2B^2}\,.$$

Нека също чрез нови полагания въведем следните три величини:

$$(7) \qquad \frac{1}{p}=\frac{\alpha}{2B^2}\text{, т.е. } p=\frac{2B^2}{\alpha}=\frac{2}{\alpha}\left(\beta+\frac{M^2}{2m}\right),$$

$$(8) \qquad \varepsilon=\sqrt{1+\frac{4E}{\alpha^2}\left(\beta+\frac{M^2}{2m}\right)}\text{, и}$$

$$(9) \qquad \gamma=\frac{|B|\sqrt{2m}}{M}=\frac{1}{M}\sqrt{2m}\sqrt{\beta+\frac{M^2}{2m}}=\frac{1}{M}\sqrt{2m\beta+M^2}=\sqrt{1+\frac{2m\beta}{M^2}}\,.$$

Очевидно:

$$(10) \qquad |C|=\alpha\sqrt{1+\frac{4E}{\alpha^2}\left(\beta+\frac{M^2}{2m}\right)}=\alpha.\varepsilon\text{, и}$$

$$(11)\qquad x = u + \frac{\alpha}{2B^2} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p},$$

така че (6) ще добие вида

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{\alpha\varepsilon}{2B^2}\cos\left[\gamma(\varphi-\varphi_0)\right] = \frac{\alpha}{2B^2}\,\varepsilon\cos\left[\gamma(\varphi-\varphi_0)\right] \equiv \frac{1}{p}\varepsilon\cos\left[\gamma(\varphi-\varphi_0)\right],$$

откъдето

$$(12)\qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{p}\varepsilon\cos\left[\gamma(\varphi-\varphi_0)\right] - \frac{1}{p} = \frac{1}{p}\{\varepsilon\cos\left[\gamma(\varphi-\varphi_0)\right]-1\}.$$

И така търсеното уравнение на траекторията $r = r(\varphi)$ има (*в полярни координати*) вида

$$(13)\qquad r(\varphi) = \frac{p}{\varepsilon\cos\left[\gamma(\varphi-\varphi_0)\right]-1},$$

където константите p, ε и γ се дават с (7), (8) и (9) съответно.

✸ **Задача 4Б.4 (**Стр. 15/Зад. 88**)**

Материална точка се движи в полето

$$(1)\qquad U(r) = -\frac{\alpha}{r}, \qquad (\alpha > 0).$$

Функцията

$$(2)\qquad \vec{\Phi} = \vec{v}\times\vec{L} - \alpha\frac{\vec{r}}{r}$$

е интеграл на движението. Да се намери **траекторията** на движението на материалната точка. Да се покаже, че векторът Φ лежи в равнината на траекторията, големината му е $\alpha\varepsilon$ (*където ε е ексцентрицитетът на траекторията*) и е насочен от центъра на полето към перихелия.

Решение: Потенциалът (1) е центросиметричен, следователно траекторията на движение е **равнинна крива**. Нека в равнината, в която лежи траекторията на движение на материалната точка, въведем полярна координатна система с единични вектори $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$. В полярни координати радиус-векторът $\vec{r}$, лежащ изцяло в тази равнина, се представя с

$$(3)\qquad \vec{r} = r.\vec{e}_r,$$

а скоростта, лежаща в същата равнина, се дава с

$$(4)\qquad \vec{v} = \dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\vec{e}}_r = \dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi.$$

Тогава за момента на импулса $\vec{L}$ следва представянето

$$(5)\qquad \vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = (r.\vec{e}_r)\times m(\dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi) = r.\dot{r}\,m(\vec{e}_r\times\vec{e}_r) + r^2.\dot{\varphi}m(\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi) =$$
$$= r^2.\dot{\varphi}m(\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi) = mr^2.\dot{\varphi}\,\vec{e}_z,$$

като очевидно $\vec{L}$ е вектор, перпендикулярен на равнината на траекторията. Тогава

$$(6)\qquad \vec{v}\times\vec{L} = (\dot{r}.\vec{e}_r + r.\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi)\times mr^2.\dot{\varphi}\,\vec{e}_z = mr^2.\dot{\varphi}\{\dot{r}.(\vec{e}_r\times\vec{e}_z) + r.\dot{\varphi}\,(\vec{e}_\varphi\times\vec{e}_z)\} =$$
$$= mr^2.\dot{\varphi}\{\dot{r}.(-\vec{e}_\varphi) + r.\dot{\varphi}\,(\vec{e}_r)\} = mr^3.\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r - mr^2\dot{r}.\dot{\varphi}.\vec{e}_\varphi.$$

Очевидно векторът $\vec{v}\times\vec{L}$ се представя като линейна комбинация от единичните вектори $\vec{e}_r$ и $\vec{e}_\varphi$, следователно лежи в същата равнина, в която лежи векторът $\vec{r}$. По този начин доказахме, че векторът $\vec{\Phi}$, който съгласно (2) се изразява посредством $\vec{v}\times\vec{L}$ и $\vec{r}$, е компланарен с тях и лежи в равнината на траекторията.

Щом това е така, нека умножим скаларно двете страни на равенството (2) с $\vec{r}$:

(7) $\vec{\Phi}.\vec{r} = (\vec{v}\times\vec{L}).\vec{r} - \alpha\dfrac{\vec{r}.\vec{r}}{r}$.

Ако означим ъгъла между векторите $\vec{\Phi}$ и $\vec{r}$ със φ, то

(8) $\vec{\Phi}.\vec{r} = \Phi.r\cos\varphi$

Тройното (*смесено*) векторно произведение $(\vec{v}\times\vec{L}).\vec{r}$ може да се представи така

(9) $(\vec{v}\times\vec{L}).\vec{r} \equiv \vec{r}.(\vec{v}\times\vec{L}) = (\vec{r}.\vec{v}.\vec{L}) = (\vec{r}\times\vec{v}).\vec{L} = \dfrac{1}{m}(\vec{r}\times m\vec{v}).\vec{L} = \dfrac{1}{m}\vec{L}.\vec{L} = \dfrac{L^2}{m}$.

По този начин (7) добива вида

(10) $\Phi.r\cos\varphi = \dfrac{L^2}{m} - \alpha\dfrac{r^2}{r} = \dfrac{L^2}{m} - \alpha r$,

откъдето, след почленно деление с $\alpha r \neq 0$, получаваме

(11) $\dfrac{\Phi}{\alpha}\cos\varphi = \dfrac{L^2}{\alpha m}\dfrac{1}{r} - 1$, или още

(12) $\dfrac{L^2}{\alpha m}\dfrac{1}{r} = 1 + \dfrac{\Phi}{\alpha}\cos\varphi$.

Ако така полученото уравнение сравним с уравнението на конично сечение

(13) $\dfrac{p}{r} = 1 + \varepsilon\cos\varphi$,

можем да заключим, че (12) е уравнение на конично сечение с фокален параметър $p = \dfrac{L^2}{\alpha m}$ и ексцентрицитет $\varepsilon = \dfrac{\Phi}{\alpha}$, откъдето следва

(14) $\Phi = \alpha\varepsilon$, к.т.д.

✸ **Задача 4Б.5 (**Стр. 14/Зад. 81**)**

Да се намери закона за движение и уравнението на траекторията на материална точка в потенциалното поле

(1) $U = -\alpha / r, \quad (\alpha > 0)$

в случая, когато пълната механична енергия $E = 0$.

Решение:

А) Уравнение на траекторията при нулево начално условие $\varphi_0 = 0$

(2) $\varphi = \dfrac{M}{\sqrt{2m}}\displaystyle\int\dfrac{dr}{r^2.\sqrt{E - U(r) - \dfrac{M^2}{2mr^2}}} + \varphi_0 \equiv \dfrac{M}{\sqrt{2m}}\displaystyle\int\dfrac{dr}{r^2.\sqrt{\dfrac{\alpha}{r} - \dfrac{M^2}{2mr^2}}}$.

Нека положим $1/r = u$, т.е. $dr = -u^{-2}du$. Така получаваме

(3) $\varphi = -\dfrac{M}{\sqrt{2m}}\displaystyle\int\dfrac{du}{.\sqrt{\alpha.u - \dfrac{M^2}{2m}u^2}}$.

Да разгледаме квадратния тричлен под радикала в знаменателя

$f(u) = -\dfrac{M^2}{2m}u^2 + \alpha.u \equiv au^2 + bu$.

Нека положим

(4) $$u = z - \frac{b}{2a} = z - \frac{\alpha}{2\left(-\frac{M^2}{2m}\right)} = z + \frac{\alpha m}{M^2},$$ като очевидно $du = dz$.

Тогава квадратният тричлен под радикала в знаменателя става

$$-\frac{M^2}{2m}u^2 + \alpha.u = -\frac{M^2}{2m}\left(z + \frac{\alpha m}{M^2}\right)^2 + \alpha\left(z + \frac{\alpha m}{M^2}\right) =$$
$$= -\frac{M^2}{2m}z^2 - 2\frac{M^2}{2m}\frac{\alpha m}{M^2}z - \frac{M^2}{2m}\frac{\alpha^2 m^2}{M^4} + \alpha z + \frac{\alpha^2 m}{M^2} =$$
$$= -\frac{M^2}{2m}z^2 - \alpha z - \frac{\alpha^2 m}{2M^2} + \alpha z + \frac{\alpha^2 m}{M^2} = \frac{\alpha^2 m}{2M^2} - \frac{M^2}{2m}z^2.$$

Заместваме така полученото представяне в интеграла (3)

(5) $$\varphi = -\frac{M}{\sqrt{2m}}\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{\alpha^2 m}{2M^2} - \frac{M^2}{2m}z^2}} = -\frac{M}{\sqrt{2m}}\int \frac{dz}{\sqrt{\frac{\alpha^2 m}{2M^2}}\sqrt{1 - \frac{M^4}{\alpha^2 m^2}z^2}} =$$

$$= -\frac{M^2}{\alpha m}\int \frac{dz}{\sqrt{1 - \left(\frac{M^2 z}{\alpha m}\right)^2}} = -\int \frac{d\left(\frac{M^2 z}{\alpha m}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{M^2 z}{\alpha m}\right)^2}} = \arccos\left(\frac{M^2 z}{\alpha m}\right).$$

И така

(6) $$\varphi = \arccos\left(\frac{M^2 z}{\alpha m}\right),$$ откъдето (7) $$\frac{M^2 z}{\alpha m} = \cos\varphi.$$

Възстановяваме всички функции, за които сме правили полагания в (1) и (4)

(8) $$\frac{M^2}{\alpha m}\left(\frac{1}{r} - \frac{\alpha m}{M^2}\right) = \cos\varphi,$$ т.е. $$\frac{M^2}{\alpha m}\frac{1}{r} - 1 = \cos\varphi,$$ или още

(9) $$\frac{1}{r} = \frac{\alpha m}{M^2}(1 + \cos\varphi).$$

Ако положим

(10) $$p = \frac{M^2}{\alpha m}$$

и заместим в (9), получаваме уравнението на траекторията в полярни координати

(11) $$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + \cos\varphi),$$

което представлява уравнение на конично сечение.

Б) Закон за движението

Той се представя като решение на интеграла (при $t_0 = 0$)

(12) $$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{\alpha}{r} - \frac{M^2}{2mr^2}}} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dr}{\frac{1}{r}\sqrt{\alpha r - \frac{M^2}{2m}}} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{r\,dr}{\sqrt{\alpha r - \frac{\alpha p}{2}}},$$

където сме използвали (10). Нека потърсим удобно полагане за този интеграл. За целта използваме намереното вече уравнение на траекторията (11), съгласно което

$$(13)\quad r=\frac{p}{1+\cos\varphi}=\frac{p}{2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}=\frac{p}{2}(1+tg^2\frac{\varphi}{2}),$$

откъдето заключаваме, че е удобно да положим

$$(14)\quad tg\frac{\varphi}{2}=\xi .$$

Тогава (13) добива вида

$$(15)\quad r=\frac{p}{2}(1+\xi^2),\qquad \text{като очевидно } dr=\frac{p}{2}2\xi\, d\xi=p\xi\, d\xi .$$

Заместваме (15) в (12)

$$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{r\,dr}{\sqrt{\alpha r-\dfrac{\alpha p}{2}}}=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{\dfrac{p}{2}(1+\xi^2)\,p\xi\,d\xi}{\sqrt{\alpha\dfrac{p}{2}(1+\xi^2)-\dfrac{\alpha p}{2}}}=\sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{p^2}{2}\int\frac{(1+\xi^2)\,\xi\,d\xi}{\sqrt{\dfrac{\alpha p}{2}+\dfrac{\alpha p}{2}\xi^2-\dfrac{\alpha p}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{p^2}{2}\int\frac{(1+\xi^2)\,\xi\,d\xi}{\sqrt{\dfrac{\alpha p}{2}\xi^2}}=\sqrt{\frac{m}{2}}\,\frac{p^2}{2}\int\frac{(1+\xi^2)\,\xi\,d\xi}{\xi\sqrt{\dfrac{\alpha p}{2}}}=\sqrt{\frac{m}{2}}\sqrt{\frac{2}{\alpha p}}\,\frac{p^2}{2}\int(1+\xi^2)\,d\xi=$$

$$=\sqrt{\frac{m}{\alpha p}}\,\frac{p^2}{2}\{\int d\xi+\int\xi^2\,d\xi\}=\sqrt{\frac{m}{\alpha p}}\,\frac{p^2}{2}\left(\xi+\frac{\xi^3}{3}\right)=\sqrt{\frac{mp^4}{\alpha p}}\left(\frac{\xi}{2}+\frac{\xi^3}{6}\right)=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\left(\frac{\xi}{2}+\frac{\xi^3}{6}\right)$$

И така получихме следния закон за движение (в параметричен вид)

$$(16)\quad t=\sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\left(\frac{\xi}{2}+\frac{\xi^3}{6}\right).$$

За да получим координатно представяне на този закон във вида

$$(17)\quad \left|\begin{array}{l} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \end{array}\right.,$$

е необходимо най-напред да изразим $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ посредством ξ:

$$(18)\quad \cos\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1,$$

и понеже (по полагане)

$1+\xi^2=1+tg^2\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}$, то $\cos^2\dfrac{\varphi}{2}=\dfrac{1}{1+\xi^2}$, следователно (18) добива вида

$$(19)\quad \cos\varphi=2\cos^2\frac{\varphi}{2}-1=2\frac{1}{1+\xi^2}-1=\frac{2-1-\xi^2}{1+\xi^2}=\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2}.$$

Тогава

$$\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}=2\left(tg\frac{\varphi}{2}.\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\frac{\varphi}{2}=2\underbrace{tg\frac{\varphi}{2}}_{\xi}.\cos^2\frac{\varphi}{2}=2\xi\frac{1}{1+\xi^2}\equiv\frac{2\xi}{1+\xi^2},\ \text{т.е.}$$

$$(20)\quad \sin\varphi=\frac{2\xi}{1+\xi^2}.$$

Заместваме r от (15) и $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ от (19) и (20) в (17), и получаваме

$$(21)\qquad x = r\cos\varphi = \frac{p}{2}(1+\xi^2)\frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} = \frac{p}{2}(1-\xi^2)\text{, и}$$

$$(22)\qquad y = r\sin\varphi = \frac{p}{2}(1+\xi^2)\frac{2\xi}{1+\xi^2} = p\xi\,,$$

като в добавка на тези две параметрични уравнения (*закон за движението*) имаме намереното вече в (16)

$$t = \sqrt{\frac{mp^3}{\alpha}}\left(\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^3}{6}\right).$$

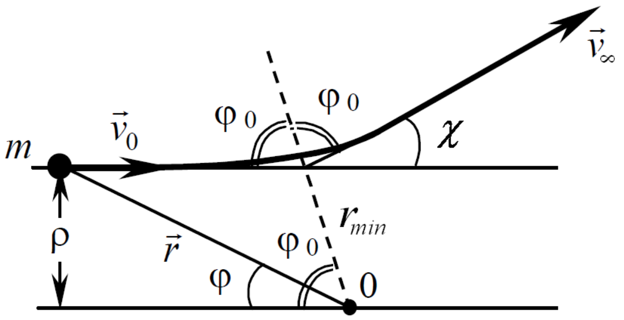
🕮

Тема 5: Разсейване на частици

Теоретичен минимум: разсейването на частици е движение на частици с достатъчно малки маси μ в полето $U(r)$ на неподвижен силов център, разположен в центъра на масите на системата от частици. Дефинирана по този начин, задачата за разсейване на частица (*частици*) се явява своеобразна компилация от две добре познати вече задачи на теоретичната механика:

☞ задача за две тела;

☞ движение в централно-симетричното поле на силов център.



На фигурата О е неподвижен силов център, от полето на който се разсейва частица с маса m. По определение под ъгъл на разсейване се разбира (*виж чертежа*) ъгълът

$$(1)\qquad \chi = \left|\pi - 2\varphi_0\right|.$$

От теорията (*задачата*) за движение на частица в централно-симетричното поле на силов център е известно, че

$$(2)\qquad \varphi_0 = \frac{M}{\sqrt{2\mu}}\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{dr}{r^2.\sqrt{E-U_{eff}(r)}}\,,$$

където:

❖ M – момент на импулса на частицата;

❖ μ е т.нар. приведена маса на системата (*частица + силов център*), приблизително равна на тази на силовия център, понеже $\mu = \dfrac{mM_ц}{m+M_ц}$, а $m << M_ц$;

❖ $$\underbrace{U_{eff}(r)}_{Ефективен потенциал} = \underbrace{U(r)}_{Силов потенциал} + \underbrace{\frac{M^2}{2\mu r^2}}_{Центробежен потенциал}\;;$$

❖ $r_{\min}$ е реалният положителен корен на уравнението $U_{eff}(r) = E$, т.е. на

$$(3)\qquad E - U(r_{\min}) - \frac{M^2}{2\mu r_{\min}^2} = 0\,.$$

При инфинитно движение ($E > 0$) е по-удобно вместо с пълната енергия (E) и момента на импулса (M) на частицата да боравим със следните два параметъра:

- V_∞ - скорост на частицата в безкрайност;
- ρ - прицелно разстояние.

Определение 1: прицелно разстояние ρ се нарича най-малкото разстояние, на което частицата **би** преминала покрай силовия център, ако той (*или неговото поле*) отсъстваше.

Определение 2: скорост V_∞ е онази скорост, която по силата на закона за запазване на енергията частицата **би имала** (*следва да притежава*) в безкрайността, където (*по определение*) потенциалната й енергия е равна на нула:

(4) $$E = T + U \equiv T(\infty) + \underbrace{U(\infty)}_{=0} = \frac{\mu}{2}V_\infty^2,$$

откъдето следва удобна връзка между пълната енергия и скоростта в безкрайност

(5) $$E = \frac{\mu}{2}V_\infty^2.$$

Но чрез V_∞ може да се изрази не само пълната енергия E на частицата, но и нейният момент на импулса M. Действително съгласно ЗЗМИ $\vec{M} = const$, т.е.

(6) $$M \equiv M(\infty) = \mu\rho V\infty.$$

Заместваме енергия E от (5) и момента на импулса M от (6) в (2)

$$\varphi_0 = \frac{(\mu\rho V\infty)}{\sqrt{2\mu}}\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{dr}{r^2.\sqrt{\frac{\mu}{2}V_\infty^2 - U(r) - \frac{(\mu\rho V\infty)^2}{2\mu r^2}}} =$$

$$= \frac{(\mu\rho V\infty)}{\sqrt{2\mu}}\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{dr}{r^2.\sqrt{\frac{\mu}{2}}V_\infty\sqrt{1 - \frac{2U(r)}{\mu V_\infty^2} - \frac{\rho^2}{r^2}}}, \text{ т.е.}$$

(7) $$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{\rho\, dr}{r^2.\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{2U(r)}{\mu V_\infty^2}}}.$$

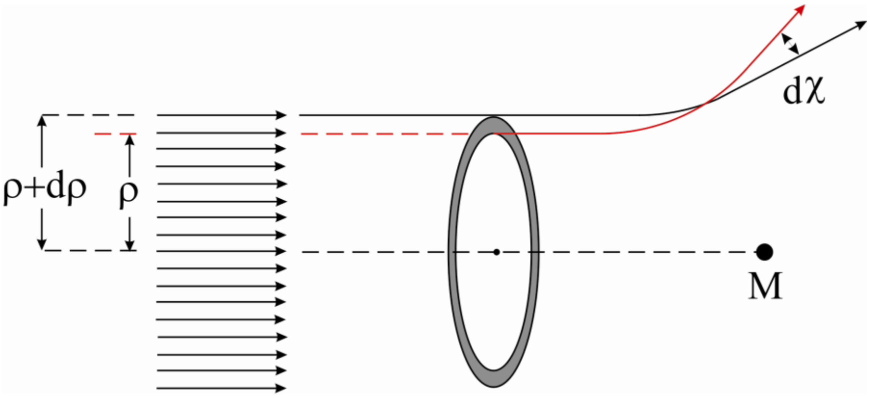
Вижда се, че при зададени (*известни*) $r_{\min}$, прицелно разстояние ρ, скорост в безкрайността V_∞ и силов потенциал $U(r)$ можем, след заместване на (7) в (1), да определим ъгъла на разсейване на частицата. При това лесно се вижда, че за фиксирани V_∞ и $U(r)$ ъгълът на разсейване се оказва в **параметрична зависимост** от прицелното разстояние ρ, т.е.

(8) $$\chi = \chi(\rho).$$

Лесно може да се съобрази, че тъй като с намаляването на прицелното разстояние ъгълът на разсейване нараства, то $\frac{d\chi}{d\rho} < 0$ (или $\frac{d\rho}{d\chi} < 0$).

<u>Диференциални характеристики (сечения) на разсейването</u>:

Нека с $n\,[cm^{-2}]$ означим повърхнинната плътност на снопа частици, разсейващи се от силов (*потенциален*) център. Нека определим броят dN_χ на частиците, които имайки прицелни разстояния в диапазона от ρ до $\rho + d\rho$, се разсейват на ъгли в диапазона от χ до $\chi + d\chi$.



Очевидно

(9) $dN_\chi = n.dS = n.2\pi\,\rho\,d\rho$.

Тогава величината (*отношението*)

(10) $d\sigma = \dfrac{dN_\chi}{n} = 2\pi\,\rho\,d\rho$

се нарича **диференциално сечение на разсейването**. Понеже $\rho = \rho(\chi)$, то очевидно формула (10) е представима още във вида

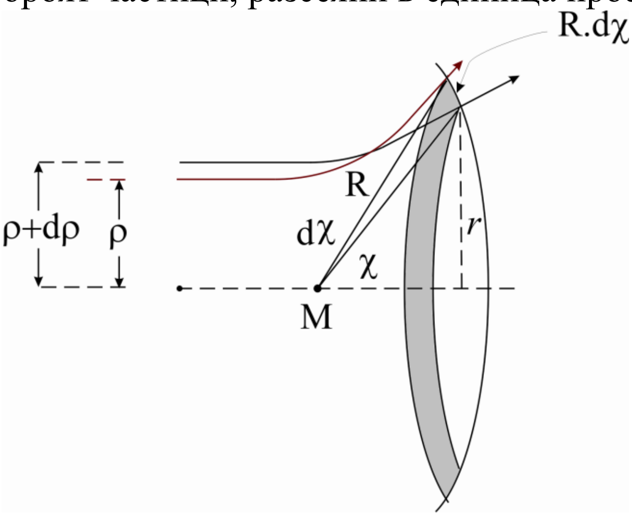
(11) $$d\sigma = 2\pi\,\rho\,d\rho\frac{d\chi}{d\chi} = 2\pi\,\rho\left|\frac{d\rho}{d\chi}\right|d\chi\,,$$

където производната $\dfrac{d\rho}{d\chi}$ е взета по модул защото, както вече бе коментирано, тя е отрицателна, а сечението на разсейване $d\sigma$ трябва да е положително определена величина.

Освен диференциалното сечение може да се определи и **пълното** (*тотално*) **ефективно сечение** на разсейване

(12) $$\sigma_t = \int_{\chi=0}^{\pi} d\sigma(\chi) = 2\pi\int_0^{\pi}\rho\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi\,.$$

Може да се дефинира и още една диференциална характеристика, даваща броят частици, разсеяни в единица пространствен ъгъл $d\Omega$:



Частиците с прицелни разстояния в диапазона от ρ до $\rho + d\rho$ се разсейват на ъгли от χ до $\chi + d\chi$, като се „вместват" в пространствен ъгъл

(13) $d\Omega = \dfrac{dS}{R^2}$,

където R е разстоянието до силовия център M. Площта dS на показания на чертежа сферичен пояс се дава с

(14) $dS = (2\pi r)(R.d\chi)$,

следователно

(15) $dS = 2\pi R\sin\chi\,R.d\chi = 2\pi R^2\sin\chi\,d\chi$

Замествайки (15) в (13) получаваме

(16) $$d\Omega = \frac{dS}{R^2} = \frac{2\pi R^2\sin\chi\,d\chi}{R^2} = 2\pi\sin\chi\,d\chi\,.$$

Тогава въпросното диференциално сечение може да се дефинира като

(18) $$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi\,\rho(\chi)\left|\dfrac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi}{2\pi\sin\chi\,d\chi}\text{, т.е.}$$

(19) $$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|.$$

✸ **Задача 5.1 (**Стр. 16/Зад. 98**)**

Да се определят диференциалното ефективно сечение и пълното сечение на разсейване на частици от абсолютно твърдо тяло с формата на кълбо с радиус R, като за целта се анализира разсейването от полеви център

$$U(r)=\begin{cases}\infty, & r<R\\ 0, & r>R\end{cases}.$$

Решение:

(1) $$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{\rho(\chi)}{\sin\chi}\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|,$$

т.е. необходимо е да определим в явен вид зависимостта $\rho=\rho(\chi)$.

(2) $\chi=|\pi-2\varphi_0|$, където

(3) $$\varphi_0=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{\rho\,dr}{r^2.\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U(r)}{\mu V_\infty^2}}}.$$

По принцип би могло $r_{\min}$ да се търси и аналитично, но тъй като за $r<R$ подинтегралната величина в (3) става тъждествено равна на нула (разсейващият потенциал там е безкрайно голям, и частицата не може да влезе в кълбото), то приемаме $r_{\min}=R$. Така интегралът (3) добива вида

(4) $$\varphi_0=\int_R^{\infty}\frac{\rho\,dr}{r^2.\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U(r)}{\mu V_\infty^2}}}\equiv\int_R^{\infty}\frac{\rho\,dr}{r^2.\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}}}.$$

Полагаме $u=\frac{1}{r}$, т.е. $dr=-\frac{1}{u^2}du$, с което интегралът добива вида

(5) $$\varphi_0=\int_{1/R}^{0}\frac{u^2\rho\left(-\frac{1}{u^2}du\right)}{\sqrt{1-\rho^2u^2}}=-\int_{1/R}^{0}\frac{d(\rho u)}{\sqrt{1-(\rho u)^2}}=-\arcsin(\rho u)\Big|_{1/R}^{0}=\arcsin\frac{\rho}{R}.$$

Щом $\varphi_0=\arcsin\frac{\rho}{R}$, то следователно

(6) $\rho=R\sin\varphi_0$.

***Допълнение.** Може и така:

(5) $$\varphi_0=\int_{1/R}^{0}\frac{u^2\rho\left(-\frac{1}{u^2}du\right)}{\sqrt{1-\rho^2u^2}}=-\int_{1/R}^{0}\frac{d(\rho u)}{\sqrt{1-(\rho u)^2}}=\arccos(\rho u)\Big|_{1/R}^{0}=$$

$$= \arccos(0) - \arccos\frac{\rho}{R} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{\rho}{R},$$

откъдето

$$\arccos\frac{\rho}{R} = \frac{\pi}{2} - \varphi_0, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\rho}{R} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right) = \sin\varphi_0 .$$

Щом $\varphi_0 = \arcsin\frac{\rho}{R}$, то следователно

(6) $\qquad \rho = R\sin\varphi_0 .$

Ако в (6) заместим φ_0 от (2), т.е. $\varphi_0 = \frac{\pi-\chi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2}$, то ще имаме

(7) $\qquad \rho(\chi) = R\cos\frac{\chi}{2},$

което всъщност представлява търсената зависимост $\rho = \rho(\chi)$.

За определяне сечението на разсейване следва да заместим (7) в (1)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R\cos\frac{\chi}{2}}{\sin\chi}\left|\frac{dR\cos\frac{\chi}{2}}{d\chi}\right| = \frac{R^2\cos\frac{\chi}{2}}{\sin\chi}\left|-\sin\frac{\chi}{2}\frac{1}{2}\right| = \frac{R^2}{2\sin\chi}\cos\frac{\chi}{2}\sin\frac{\chi}{2} =$$

$$= \frac{R^2}{4\sin\chi}2\cos\frac{\chi}{2}\sin\frac{\chi}{2} = \frac{R^2}{4\sin\chi}\sin\chi = \frac{R^2}{4}.$$

И така

(8) $\qquad \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{R^2}{4} = const .$

Пълното сечение на разсейване е

(9) $\qquad \sigma_t = 2\pi\int_0^{\pi} R\cos\frac{\chi}{2}\left|\frac{dR\cos\frac{\chi}{2}}{d\chi}\right| d\chi = \pi R^2\int_0^{\pi}\sin\frac{\chi}{2}\cos\frac{\chi}{2}\,d\chi =$

$$= \frac{\pi R^2}{2}\int_0^{\pi}\sin\chi\,d\chi = -\frac{\pi R^2}{2}\cos\chi\Big|_0^{\pi} = \pi R^2 = const .$$

Коментар: оказва се, че пълното сечение на разсейване е равно на чисто „геометричното” напречно сечение πR^2 на разсейващия център – кълбото.

✸ Задача 5.2 (Стр. 16/Зад. 97**)**

Да се изрази диференциалното ефективно сечение $d\sigma$ на разсейване на частици в централното поле

$$U(r) = \frac{\alpha}{r^2} \quad (\alpha > 0).$$

Решение:

(1) $\qquad \chi = |\,\pi - 2\varphi_0\,|$, където

$$(2)\qquad \varphi_0=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{\rho\,dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U(r)}{\mu V_\infty^2}}}=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2\alpha}{\mu V_\infty^2}\frac{1}{r^2}}}.$$

т.е. отново е необходимо да определим в явен вид зависимостта $\rho=\rho(\chi)$.

В (2) $r_{\min}$ е реален <u>положителен</u> корен на уравнението

$$(3)\qquad 1-\left(\rho^2+\frac{2\alpha}{\mu V_\infty^2}\right)\frac{1}{r^2}=0,$$

който е

$$(4)\qquad r_{\min}=\sqrt{\rho^2+\frac{2\alpha}{\mu V_\infty^2}}.$$

Очевидно $r_{\min}=|M|$, където с M е означена величина, чийто квадрат е равен на

$$(5)\qquad M^2=\rho^2+\frac{2\alpha}{\mu V_\infty^2}.$$

С отчитане на полагането (5) интегралът (2) добива вида

$$(6)\qquad \varphi_0=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1-\left(\rho^2+\frac{2\alpha}{\mu V_\infty^2}\right)\frac{1}{r^2}}}=\int_{r_{\min}}^{\infty}\frac{\frac{\rho}{r^2}dr}{\sqrt{1-M^2\frac{1}{r^2}}}.$$

Нека в (6) извършим полагането $u=\frac{1}{r}$, т.е. $dr=-\frac{1}{u^2}du$, с което интегралът добива вида

$$(7)\qquad \varphi_0=\int_{1/r_{\min}}^{0}\frac{u^2\rho\left(-\frac{1}{u^2}du\right)}{\sqrt{1-M^2u^2}}=-\int_{1/r_{\min}}^{0}\frac{\rho\,du}{\sqrt{1-(Mu)^2}}=-\frac{\rho}{M}\int_{1/r_{\min}}^{0}\frac{d(Mu)}{\sqrt{1-(Mu)^2}}=$$

$$=-\frac{\rho}{M}\arcsin(Mu)\Big|_{1/r_{\min}}^{0}=\frac{\rho}{M}\arcsin\frac{M}{r_{\min}}=\frac{\rho}{M}\arcsin 1=\frac{\rho}{M}\frac{\pi}{2}.$$

И така с отчитането на (5) получаваме

$$(8)\qquad \varphi_0=\frac{\pi}{2}\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\frac{2\alpha}{\mu V_\infty^2}}}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\alpha}{\mu\rho^2V_\infty^2}}}.$$

Ако в (8) заместим φ_0 от (1), т.е. $\varphi_0=\frac{\pi-\chi}{2}$, ще имаме още

$$(9)\qquad \frac{\pi-\chi}{2}=\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\alpha}{\mu\rho^2V_\infty^2}}},$$

откъдето

(10) $$1+\frac{2\alpha}{\mu\rho^2 V_\infty^2}=\left(\frac{\pi}{\pi-\chi}\right)^2.$$

Решаваме горното равенство относно прицелното разстояние $\rho=\rho(\chi)$:

$$\frac{2\alpha}{\mu\rho^2 V_\infty^2}=\left(\frac{\pi}{\pi-\chi}\right)^2-1\equiv\frac{\pi^2-(\pi-\chi)^2}{(\pi-\chi)^2}=\frac{2\pi\chi-\chi^2}{(\pi-\chi)^2};$$

т.е. $$\frac{\mu\rho^2 V_\infty^2}{2\alpha}=\frac{(\pi-\chi)^2}{2\pi\chi-\chi^2};$$

(11) $$\rho(\chi)=\sqrt{\frac{2\alpha}{\mu}}\frac{\pi-\chi}{\sqrt{(2\pi-\chi)\chi}}\frac{1}{V_\infty},$$

което всъщност представлява търсената зависимост $\rho=\rho(\chi)$.

За определяне сечението на разсейване следва да заместим (11) в формулата

(12) $$d\sigma=2\pi\,\rho\,d\rho\frac{d\chi}{d\chi}=2\pi\,\rho(\chi)\left|\frac{d\rho(\chi)}{d\chi}\right|d\chi$$

и да се приложи елементарно, но „обемисто” диференциране по χ.

Тема 6: Едномерни колебания. Малки колебания при финитно движение

Теоретичен минимум: Едномерно движение е **движението на система с една степен на свобода**. За такава система, при предположение, че единствената обобщена координата е напр. декартовата координата x, уравнението на Лагранж има вида

(Ф.1) $$L=\frac{m\dot{x}^2}{2}-U(x).$$

От закона за запазване на енергията при едномерно движение следва:

(Ф.2) $$E=\frac{m\dot{x}^2}{2}+U(x)=const,\qquad \text{т.е.}\qquad \frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2}{m}[E-U(x)]},$$

откъдето след интегриране се получава уравнението на движение

(Ф.3) $$t=\sqrt{\frac{m}{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}+t_0.$$

Периодът T на периодично едномерно колебание в област на финитно движение може да се определи, съгласно формула (Ф.3), като удвоеното време за движение от едната точка на обръщане (x_1) до другата точка на обръщане (x_2), т.е.

(Ф.4) $$T=\sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}},$$

където точките на обръщане x_1 и x_2 се определят като корени на уравнението $U(x)=E$.

Уравнение на движението на едномерен хармоничен осцилатор

(Ф.5) $$\ddot{x}+\omega_0^2 x=0.$$

✸ **Задача 6.1**

С помощта на уравнение на движението на едномерен хармоничен осцилатор да се получат представяния за потенциалната енергия и еластичната сила, заставяща тяло да извършва едномерни колебания.

Решение: За целта извършваме следните преобразования над уравнението на движението на едномерен хармоничен осцилатор

(1) $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$\dot{v} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \Big| \quad .v.m \neq 0$

$m v\dot{v} + m v \omega_0^2 x = 0$;

$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\omega_0^2\, x^2\right) = 0$, т.е.

(2) $\frac{d}{dt}\left(T + \frac{kx^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}(T+U) = 0$,

където сме положили

(3) $k = m\omega_0^2$.

Така получаваме съотношението (*интеграл на движението*)

(4) $T + \frac{kx^2}{2} \equiv T + U = E = const$

Потенциалната енергия е

(5) $U = E - T = \frac{kx^2}{2}$.

Накрая по определението за сила

(6) $F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kx^2}{2}\right) = -k\,x$ - еластична сила.

✸ **Задача 6.2 (**Стр. 12/Зад. 61**)**

Да се намери закона за движение на материална точка в едномерното потенциално поле $U(x) = -\alpha\, x^4$, ако началната й абсциса е $x(0) = x_0$, а пълната й механична енергия е $E = 0$.

Решение: съгласно ЗЗЕ

(1) $\frac{m\dot{x}^2}{2} + U = E$, т.е. (2) $\dot{x}^2 = \frac{2}{m}[E - U(x)]$.

Но по условие $E = 0$ и $U(x) = -\alpha\, x^4$, следователно

(2) $\dot{x}^2 = \frac{2}{m}\alpha\, x^4$, т.е.

(3) $\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}\, x^2$ (*уравнение с разделящи се променливи*)

$x^{-2}dx = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}dt$.

След неговото интегриране получаваме

$\frac{1}{-2+1}x^{-1} = \pm\sqrt{\frac{2\alpha}{m}}t + C$, или още

(4) $-\dfrac{1}{x} = \pm\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}t + C$.

Съгласно началните условия при $t = 0$ $x(0) = x_0$, следователно

(5) $C = -\dfrac{1}{x_0}$,

т.е. общото решение е

(6) $\dfrac{1}{x} = \pm\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}}t + \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{\pm\sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}x_0}t + 1}{x_0}$, или още

(7) $x(t) = \dfrac{x_0}{1 \pm \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}x_0 t}}$.

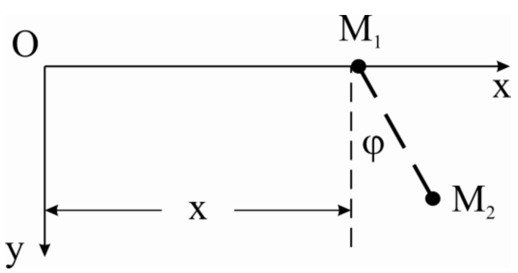
<u>Анализ на полученото решение</u>:

а) при $\dot{x}(0) > 0$ частицата се отдалечава до безкрайност. Действително както следва от (3) в този случай остава знака „-„. Ако възприемем този знак и в (7), то за времето t_∞ до пълно отдалечаване ще имаме $x(t_\infty) = \infty$, следователно $1 - \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}x_0 t_\infty} = 0$, откъдето $t_\infty = \dfrac{1}{x_0}\sqrt{\dfrac{m}{2\alpha}}$.

б) при $\dot{x}(0) < 0$ в (3) остава знака „+„ и от (7) ще имаме $x(t) = \dfrac{x_0}{1 + \sqrt{\dfrac{2\alpha}{m}x_0 t}}$, откъдето следва, че при $t \to \infty$ очевидно $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, т.е. тялото се връща към началото на КС.

✸ **Задача 6.3 (**Стр. 35/Зад. 201**)**

(*Естествено продължение на зад. 181 от стр. 31*) Да се определи периода на малките колебания на махалото, описано в зад. 181.



Решение: Върху системата от две тела, съставляващи математическото махало с подвижна точка на окачване, са наложени общо 4 връзки:

- две са наложени върху M_1 (движи се само по хоризонталната права Ox);
- една е наложена върху M_2 (движи се само в равнината Oxy);
- една връзка е наложена поради обстоятелството, че $|M_1M_2| = l = const$.

По този начин броя на степените на свобода s на системата от $N = 2$ тежки материални точки с наложени $k = 4$ на брой връзки е $s = 3.N - k = 3.2 - 4 = 2$. Следователно за описание движението на системата са необходими $s = 2$ независими обобщени координати. Избираме те да бъдат разстоянието $x(t) = OM_1$ и ъгълът $\varphi(t)$, който M_1M_2 сключва с вертикалата.

Изразяваме декартовите координати на двете точки посредством обобщените координати:

$$(1)\quad \left| \begin{array}{l} x_1 = x(t) \\ y_1 = 0 \end{array} \right. \qquad \text{и} \qquad (2)\quad \left| \begin{array}{l} x_2 = x(t) + l\sin\varphi \\ y_2 = l\cos\varphi \end{array} \right. .$$

Изразяваме последователно кинетичните и потенциалните енергии на двете тела, а след това кинетичната и потенциалната енергии на системата:

$$(3)\quad \left| \begin{array}{l} T_1 = \dfrac{m_1}{2}(\dot{x}_1{}^2 + \dot{y}_1{}^2) = \dfrac{m_1}{2}\dot{x}^2(t) \\ U_1 = m_1\, g\, y_1 = 0 \end{array} \right. ;$$

$$(4)\quad \left| \begin{array}{l} T_2 = \dfrac{m_2}{2}(\dot{x}_2{}^2 + \dot{y}_2{}^2) = \dfrac{m_2}{2}\{[\dot{x} + l\cos\varphi.\dot{\varphi}]^2 + [-l\sin\varphi\dot{\varphi}]^2\} = \dfrac{m_2}{2}\{\dot{x}^2 + 2l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\} \\ U_2 = m_2\, g\, y_2 = m_2\, g\, l\cos\varphi \end{array} \right. ;$$

$$(5)\quad \left| \begin{array}{l} T = T_2 + T_2 = \dfrac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dfrac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 \\ U = U_1 + U_2 \equiv U_2 = m_2\, g\, l\cos\varphi \end{array} \right. .$$

Функцията на Лагранж за тази система е

$$(6)\qquad L = T - U = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{m_2}{2}l^2\dot{\varphi}^2 - m_2\, g\, l\cos\varphi .$$

Уравненията на Лагранж са $s = 2$ на брой.

А) уравнение за обобщената координата $\varphi(t)$:

$$(7)\qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 0 .$$

За намиране на (7) в явен вид определяме производните

☞ $$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}[-\sin\varphi] - m_2\, g\, l[-\sin\varphi] = -m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2\, g\, l\sin\varphi ;$$

☞ $$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m_2 l\dot{x}\cos\varphi + \frac{m_2}{2}l^2(2\dot{\varphi}) = m_2 l\dot{x}\cos\varphi + m_2 l^2\dot{\varphi} ;$$

☞ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + m_2 l\dot{x}(-\sin\varphi\dot{\varphi}) + m_2 l^2\ddot{\varphi} = m_2 l\ddot{x}\cos\varphi - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2 l^2\ddot{\varphi} .$$

Заместваме така намерените производни в (7)

$$(8)\qquad -m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + m_2\, g\, l\sin\varphi - m_2 l\ddot{x}\cos\varphi + m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi - m_2 l^2\ddot{\varphi} = 0$$

След съкращения и разделяне на ($-ml$) получаваме

$$(9)\qquad l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0 .$$

Б) уравнение за обобщената координата $x(t)$:

$$(10)\qquad \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{x}} = 0 .$$

За намиране на (10) в явен вид определяме производните. Понеже $L \neq L(x)$, то

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$, следователно $x(t)$ е циклична координата. За нея уравнението (10) добива вида

(11) $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} = 0$, следователно $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C_1$, където C_1- интеграционна константа. Последното равенство означава, че функцията $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = C_1$ е интеграл на движението. Нека го определим, намирайки производната на лагранжиана (6)

(12) $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{m_1+m_2}{2}(2\dot{x}) + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = (m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi = C_1$.

Търсеният интеграл на движението е

(13) $(m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\cos\varphi\,\dot{\varphi} = C_1$.

Оказва се, че лявата страна на (13) е пълен диференциал, понеже

(14) $(m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\cos\varphi\,\dot{\varphi} = \frac{d}{dt}[(m_1+m_2)x + m_2 l\sin\varphi]$.

Заествайки (14) в (13) получаваме

(15) $d[(m_1+m_2)x + m_2 l\sin\varphi] = C_1.dt$,

откъдето след интегриране се получава

(16) $(m_1+m_2)x + m_2 l\sin\varphi = C_1.t + C_2$.

И така второто от уравненията на Лагранж допусна точно аналитично решение.

Нека сега разгледаме приближението на малки колебания, т.е. $\varphi \approx 0$, при което $\sin\varphi \approx \varphi$, а $\cos\varphi \approx 1$. При това приближение уравненията на движение (9) и (16) добиват съответно вида

(17) $l\ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi + g\sin\varphi = 0 \quad \to \quad l\ddot{\varphi} + \ddot{x} + g\,\varphi = 0$, и

(18) $(m_1+m_2)x + m_2 l\sin\varphi = C_1.t + C_2 \quad \to \quad (m_1+m_2)x + m_2 l\varphi = C_1.t + C_2$.

Нека изразим от (18) $\ddot{x}(t)$ и заместим в (17):

$$x = \frac{(C_1.t + C_2) - m_2 l\varphi}{m_1+m_2}, \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \frac{C_1 - m_2 l\dot{\varphi}}{m_1+m_2}, \quad \Rightarrow \quad \ddot{x} = -\frac{m_2 l\ddot{\varphi}}{m_1+m_2}.$$

Тогава (17) добива вида

(19) $l\ddot{\varphi} - \frac{m_2 l\ddot{\varphi}}{m_1+m_2} + g\,\varphi = 0 \quad \Big| .(m_1+m_2)$

$$l(m_1+m_2)\ddot{\varphi} - m_2 l\ddot{\varphi} + g\,(m_1+m_2)\,\varphi = 0$$

$$(lm_1 + lm_2 - lm_2)\,\ddot{\varphi} + g\,(m_1+m_2)\,\varphi = 0$$

$$lm_1\,\ddot{\varphi} + g\,(m_1+m_2)\,\varphi = 0$$

(20) $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\frac{m_1+m_2}{m_1}\varphi = 0$.

Ако положим

(21) $\omega_0{}^2 = \frac{g}{l}\frac{m_1+m_2}{m_1}$,

то (20) добива вида

(22) $\ddot{\varphi} + \omega_0^2\,\varphi = 0$,

което е уравнение на хармоничен осцилатор, извършващ колебания с период

(23) $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\frac{m_1}{m_1+m_2}}$.

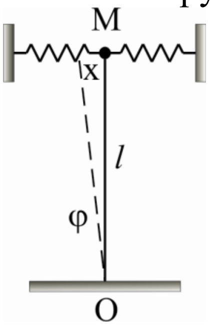
Решението на (20) е

(24) $\varphi(t) = C_1 \cos[\omega_0 t + C_2]$,

където C_1 и C_2 са интеграционни константи.

✸ **Задача 6.4 (**Стр. 35/Зад. 203**)**

Да се намери периода на малките колебания на астатичното махало, изобразено на фигурата. Пръчката ОМ да се счита недеформируема и безтегловна. Към края й М е прикрепена материална точка с маса m и две пружини с еднакъв коефициент на еластичност k. Пръчката може да се върти във вертикална равнина (равнината на чертежа) около неподвижния си край О. В равновесно положение на махалото пружините не са деформирани.



Решение: Декартовите координати на т. М при отклонение на малък ъгъл φ от равновесното й положение, са:

(1) $$\left| \begin{array}{l} x = l\sin\varphi \\ y = l\cos\varphi \end{array} \right.$$

Кинетичната енергия на астатичното пружинно махало е

(2) $$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2,$$

а потенциалната му енергия се представя като сбор от две съставящи

(3) $U = U_1 + U_2$,

където

(4) $U_1 = mgy = mgl\cos\varphi$

е потенциална енергия на махалото в гравитационното поле на Земята (*поле на силата на тежестта*), а

(5) $$U_2 = 2.\frac{1}{2}k.x^2 = kl^2 \sin^2\varphi$$

е потенциална енергия, породена от еластичната деформация на двете пружини. Едната от пружините се свива, а другата се разтяга, но и за двете пружини големината на деформацията (*по модул*) е равна на x, поради което потенциалните енергии на двете деформирани пружини са едни и същи, което и обяснява присъствието на множителя „2” във формула (5).

Лагранжианът на астатичното пружинно махало е

(6) $$L = T - U = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi - kl^2 \sin^2\varphi$$

Уравнението на Лагранж за пружинното махало е

(7) $$\frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 0$$

☞ $$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl(-\sin\varphi) - kl^2(2\sin\varphi\cos\varphi) = mgl\sin\varphi - 2kl^2\sin\varphi\cos\varphi$$

☞ $$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi},$$ ☞ $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\ddot{\varphi}.$$

След заместване на производните в уравнение (7) получаваме

(8) $$mgl\sin\varphi - 2kl^2\sin\varphi\cos\varphi - ml^2\ddot{\varphi} = 0 \qquad \Big| : (-ml^2)$$

(9) $\quad \ddot{\varphi}+\frac{2k}{m}\sin\varphi\cos\varphi-\frac{g}{l}\sin\varphi=0$.

Това е диференциалното уравнение, описващо движението на т. *M*. При малки колебания ($\varphi\approx 0$, за които $\sin\varphi\approx\varphi$, а $\cos\varphi\approx 1$) то добива вида

(10) $\quad \ddot{\varphi}+\frac{2k}{m}\varphi-\frac{g}{l}\varphi=0$, или още

(11) $\quad \ddot{\varphi}+\left(\frac{2k}{m}-\frac{g}{l}\right)\varphi=0$.

Ако положим

(12) $\quad \omega_0^{\,2}=\frac{2k}{m}-\frac{g}{l}=\frac{2kl-mg}{ml}$,

то става уравнение на хармонични колебания

(13) $\quad \ddot{\varphi}+\omega_0^{\,2}\varphi=0$,

имащи период

(14) $\quad T=\frac{2\pi}{\omega_0}=2\pi\sqrt{\frac{ml}{2kl-mg}}$.

✸ **Задача 6.5 (**Стр. 12/Зад. 63**)**

Да се намери приближено закона на движение на материална точка в едномерно потенциално поле $U=U(x)$ в близост до точката на обръщане с абсциса $x=\alpha$ $(U(\alpha)=E)$, ако потенциалната енергия е развиваема в ред на Тейлър около точката $x=\alpha$ и $U'(\alpha)=-F\neq 0$.

Решение: по условие $U(x)$ е развиваема в ред на Тейлър, следователно

(1) $$U(x)=U(x)|_{x=\alpha}+(x-\alpha)U'(x)|_{x=\alpha}+\ \ldots\ldots\ldots\approx$$
$$\approx\underbrace{U(\alpha)}_{E}+(x-\alpha)\underbrace{U'(\alpha)}_{-F}=E-(x-\alpha)F.$$

И така

(2) $\quad U(x)=E-(x-\alpha)F$.

В затворената система „*частица* + *силов център*" е в сила ЗЗЕ:

(3) $$\frac{m}{2}\dot{x}^2+U(x)=E, \qquad \Rightarrow \qquad \frac{m}{2}\dot{x}^2+E-(x-\alpha)F=E,$$ т.е.

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2=(x-\alpha)F \qquad \Big|\cdot\frac{2}{m}$$

$$\dot{x}^2=\frac{2}{m}(x-\alpha)F;$$

(4) $$\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2F}{m}}(x-\alpha)^{1/2},$$

$$(x-\alpha)^{-1/2}\,dx=\sqrt{\frac{2F}{m}}dt \qquad \Big|\int$$

$$\frac{1}{-1/2+1}(x-\alpha)^{1/2}=\sqrt{\frac{2F}{m}}t+C,$$ т.е.

(5) $\quad 2\sqrt{x-\alpha} = \sqrt{\frac{2F}{m}}t + C$.

Логично е да предположим, че при $t=0$ точката се е намирала близо (*дори е във*) точката на обръщане, т.е. $x(0)=\alpha$. Тогава лесно се установява, че интеграционната константа $C=0$, с което законът за движение (5) добива вида

(6) $\quad 2\sqrt{x-\alpha} = \sqrt{\frac{2F}{m}}t$,

откъдето след повдигане в квадрат получаваме

(7) $\quad 4(x-\alpha) = \frac{2F}{m}t^2$,

или още

(8) $\quad x = \alpha + \frac{F}{2m}t^2$.

✸ Задача 6.6

Да се определи периодът на математическо махало (точка с маса m, окачена на неразтеглива нишка с дължина ℓ) в зависимост от амплитудата (ъгълът φ_0 на начално отклонение).

Решение: пълната механична енергия на махалото е

(1) $\quad E = T + U$,

където

(2) $\quad T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2$,

(3) $\quad U = -mgy = -mg\ell\cos\varphi$.

Но пълната енергия може да се изрази още чрез амплитудата φ_0

(4) $\quad E = -mg\ell\cos\varphi_0$.

Така с отчитането на горните равенства получаваме уравнението

(5) $\quad \frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2 - mg\ell\cos\varphi = -mg\ell\cos\varphi_0 \qquad \Big| \frac{2}{m\ell^2}$

(6) $\quad \dot{\varphi}^2 = \frac{2g}{\ell}(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \qquad \Big| \sqrt{\ }$

(7) $\quad \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}$, т.е.

(8) $\quad dt = \sqrt{\frac{\ell}{2g}}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$.

Периодът T на колебанията на махалото изразяваме като учетвореното време за „прекосяване” на ъгловия диапазон от $\varphi = 0$ до $\varphi = \varphi_0$, т.е.

(9) $\quad T = 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}}$.

Представяме

$$\cos\varphi - \cos\varphi_0 = -1 + \cos\varphi + 1 - \cos\varphi_0 = (1-\cos\varphi_0) - (1-\cos\varphi) = 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2} - 2\sin^2\frac{\varphi}{2} =$$

$$= 2\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\left(1-\frac{\sin^2\varphi/2}{\sin^2\varphi_0/2}\right)=\left(\sqrt{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}\right)^2\left(1-\frac{\sin^2\varphi/2}{\sin^2\varphi_0/2}\right).$$

След заместване в радикала в знаменателя на интеграла (9) ще имаме

$$(10)\qquad T=\frac{4}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sqrt{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{1-\frac{\sin^2\varphi/2}{\sin^2\varphi_0/2}}}=2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sin\varphi/2}{\sin\varphi_0/2}\right)^2}}.$$

Нека в горния интеграл извършим полагането

$$(11)\qquad \frac{\sin\varphi/2}{\sin\varphi_0/2}=\sin\xi, \qquad \text{т.е.} \qquad \sin\frac{\varphi}{2}=\sin\frac{\varphi_0}{2}.\sin\xi,$$

откъдето след диференциране

$$(12)\qquad \cos\frac{\varphi}{2}\frac{1}{2}d\varphi=\sin\frac{\varphi_0}{2}.\cos\xi\, d\xi.$$

От (12) може да бъде изразен диференциалът $d\varphi$, необходим за смяна на променливите

$$(13)\qquad d\varphi=2\sin\frac{\varphi_0}{2}.\frac{\cos\xi}{\cos\frac{\varphi}{2}}d\xi.$$

За да изразим $d\varphi$ само чрез новата променлива ξ, използваме полагането (11) и следните елементарни тригонометрични тъждества:

$$(14)\qquad \cos\xi=\sqrt{1-\sin^2\xi}=\sqrt{1-\frac{\sin^2\varphi/2}{\sin^2\varphi_0/2}};$$

$$(15)\qquad \cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi}{2}}=\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}.$$

Накрая остана да уточним новите интеграционни граници: при $\varphi=\varphi_0$ (*горна граница*) ще имаме $\sin\xi=\frac{\sin\varphi/2}{\sin\varphi_0/2}=1\equiv\sin\frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \xi=\frac{\pi}{2}$. Така след смяната на променливите интегралът окончателно добива вида

$$(16)\qquad T=2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\varphi_0}\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sin\varphi/2}{\sin\varphi_0/2}\right)^2}}=2\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin\frac{\varphi_0}{2}\left(\frac{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\varphi/2}{\sin\varphi_0/2}\right)^2}}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}}\right)d\xi}{\sin\frac{\varphi_0}{2}\sqrt{1-\left(\frac{\sin\varphi/2}{\sin\varphi_0/2}\right)^2}}=$$

$$=4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\varphi_0}{2}\sin^2\xi}}=\ldots\ldots\ \textit{озн.}\ \sin^2\frac{\varphi_0}{2}=k^2\ldots=4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}.$$

В теорията на специалните функции интегралът

$$(17)\qquad K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}}$$

се нарича **пълен елиптичен интеграл от първи род**. С помощта на тази специална функция изразът за периода на математическото махало добива вида

$$(18)\qquad T(\varphi_0)=4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\;K(\sin\frac{\varphi_0}{2})\,.$$

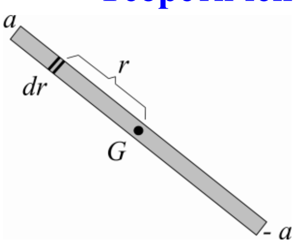
При много малки амплитуди на отклонение, за които $\sin\frac{\varphi_0}{2}\approx\frac{\varphi_0}{2}<<1$ пълният елиптичен интеграл от първи род има редовото представяне

$$(19)\qquad K(\sin\frac{\varphi_0}{2})\approx\frac{\pi}{2}(1+\frac{1}{16}\varphi_0^2+.....)\,,\ \text{т.е.}$$

$$(20)\qquad T(\varphi_0)=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\;(1+\frac{1}{16}\varphi_0^2+.....)\,.$$

Тема 7: Идеално твърдо тяло

Теоретичен минимум: в задачи, свързани с движение на идеално твърдо тяло



за намирането на функцията на Лагранж и уравненията на Лагранж, описващи движението на тялото, е необходимо да се определят кинетичната и потенциалната енергии съответно:

$$(1)\qquad T=T_{Пост}+T_{Върт}\,,$$

където

$$(2)\qquad T_{Пост}=\frac{1}{2}mV_G^2=\frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_G^{\,2}$$

е кинетична енергия на постъпателно движение на твърдо тяло, имащо радиус-вектор на своя център на масите $\vec{r}_G$, а

$$(3)\qquad T_{Върт}=\frac{1}{2}\sum_i m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2\equiv\frac{1}{2}\sum_i m_iV_i^2$$

е кинетичната енергия на въртеливото движение на същото това тяло.

Ако конкретизираме разглежданията само за един често срещащ се частен случай – права хомогенна еднородна пръчка с маса m и дължина $2a$ (*виж чертежа*), то в граничния случай $i\to\infty$ очевидно $\sum_i\ \to\int_{-a}^{a}$, като при това $m_i\to\underbrace{\left(\frac{m}{2a}\right)}_{\text{маса на единица дължина}}.dr=m_0\,dr$ и още $V_i\to\overset{*}{GP}$, където P е произволна точка от тялото, отстояща на разстояние $\vec{r}$ от центъра на масите G. Заествайки в (3) получаваме

$$(4)\qquad T_{Върт}=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\left(\frac{m}{2a}\right).\dot{GP}^2\,dr=2\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2a}\right)\int_0^a\dot{GP}^2\,dr=\left(\frac{m}{2a}\right)\int_0^a\dot{GP}^2\,dr=m_0\int_0^a\dot{GP}^2\,dr\,,$$

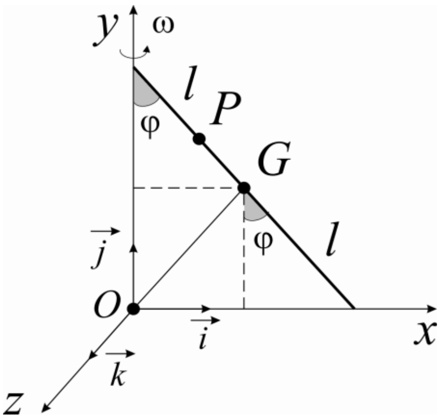
където очевидно $\overrightarrow{GP}$ трябва предварително да бъде изразен в сферични (r,θ,φ) или други подходящи координати.

След заместване на (2) и (4) в (1), за кинетичната енергия на идеално твърдото тяло се получава представянето

(5) $$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_G^{\,2} + \frac{m}{2a} \int_0^a \dot{GP}^2(r,\theta,\varphi)\, dr .$$

✸ **Задача 7.1 (**Стр. 39/Зад. 221**)**

Краищата на хомогенна тежка и тънка пръчка AB с дължина 2ℓ се хлъзгат по гладките хоризонтална и вертикална страни на правоъгълна рамка, която се върти около вертикалната си страна с постоянна ъглова скорост ω. Да се определи движението на пръчката.



Решение: в качеството на обобщена координата избираме ъгъл φ.

(1) $$L = T - U$$

За изразяване на кинетичната енергия T използваме формула (5) от теоретичната част, а именно

(2) $$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_G^{\,2} + \frac{m}{2a} \int_0^a \dot{GP}^2(r,\theta,\varphi)\, dr ,$$

където P е произволна точка, отстояща на разстояние r от центъра на тежестта G. Очевидно в равнината Oxy

(3) $$\vec{r}_G = l.\sin\varphi\, \vec{i} + l.\cos\varphi\, \vec{j} ,$$

следователно

(4) $$\dot{\vec{r}}_G = l.\cos\varphi \dot{\varphi}\, \vec{i} + l.\sin\varphi \left(\frac{d\vec{i}}{dt} \right) - l.\sin\varphi \dot{\varphi}\, \vec{j} ,$$

където е взето под внимание, че поради въртенето около оста $O\vec{y}$ единичният вектор $\vec{i}$ се върти около т. О (в *равнината Oxz*) с ъглова скорост $\vec{\omega}$, т.е. $\vec{i} = \vec{i}(t)$, и следователно този единичен вектор също трябва да бъде диференциран по времето. Както е известно

(5) $$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{i} \times \vec{\omega} = \vec{i} \times (\omega\, \vec{j}) = \omega (\underbrace{\vec{i} \times \vec{j}}_{\vec{k}}) = \omega \vec{k} .$$

С отчитането на (5) формула (4) добива вида

(6) $$\dot{\vec{r}}_G = l.\cos\varphi \dot{\varphi}\, \vec{i} + l.\sin\varphi\, \omega \vec{k} - l.\sin\varphi \dot{\varphi}\, \vec{j} .$$

Тогава

(7) $$\dot{\vec{r}}_G^{\,2} = l^2.\cos^2\varphi \dot{\varphi}^2 + l^2.\sin^2\varphi\, \omega^2 + l^2.\sin^2\varphi \dot{\varphi}^2 = l^2 (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \sin^2\varphi),$$

с което големината на скоростта на центъра на масите е представена в сферични координати, с което кинетичната енергия на постъпателно движение е

(8) $$T_{Пост} = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_G^{\,2} = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \sin^2\varphi)$$

Провеждаме същите (*по смисъл*) разглеждания и за вектора $\overrightarrow{GP} \equiv \vec{r}$:

(9) $$\overrightarrow{GP} = -r \sin\varphi\, \vec{i} + r \cos\varphi\, \vec{j} .$$

(10) $$\dot{GP} = -r.\cos\varphi \dot{\varphi}\, \vec{i} - r.\sin\varphi\, \omega \vec{k} - r.\sin\varphi \dot{\varphi}\, \vec{j} .$$

(11) $$\dot{GP}^{2} = r^2.\cos^2\varphi \dot{\varphi}^2 + r^2.\sin^2\varphi\, \omega^2 + r^2.\sin^2\varphi \dot{\varphi}^2 = r^2 (\dot{\varphi}^2 + \omega^2 \sin^2\varphi),$$

с което кинетичната енергия на въртеливото движение се представя във вида

(12) $\quad T_{Върт} = \dfrac{m}{2l}\int\limits_0^l \dot{GP}^2\,dr = \dfrac{m}{2l}\int\limits_0^l r^2(\dot\varphi^2+\omega^2\sin^2\varphi)\,dr = \dfrac{m}{2l}(\dot\varphi^2+\omega^2\sin^2\varphi)\int\limits_0^l r^2\,dr =$

$$= \frac{m}{2l}(\dot\varphi^2+\omega^2\sin^2\varphi)\left.\frac{r^3}{3}\right|_0^l = \frac{ml^2}{6}(\dot\varphi^2+\omega^2\sin^2\varphi).$$

С помощта на (8) и (12) определяме пълната кинетична енергия на въртящото се тяло:

$$T = T_{Пост} + T_{Върт} = \frac{ml^2}{2}(\dot\varphi^2+\omega^2\sin^2\varphi) + \frac{ml^2}{6}(\dot\varphi^2+\omega^2\sin^2\varphi),\ \text{т.е.}$$

(13) $\quad T = \dfrac{2}{3}ml^2(\dot\varphi^2+\omega^2\sin^2\varphi)$.

За да определим лагранжиана на системата (тялото), остава да изразим и неговата потенциална енергия (*потенциална енергия на пръчката относно нейния център на масите* G)

(14) $\quad U = mg\,y_G = mgl\cos\varphi$.

Лагранжианът е

(15) $\quad L(\varphi,\dot\varphi) = T(\dot\varphi) - U(\varphi) = \dfrac{2}{3}ml^2(\dot\varphi^2+\omega^2\sin^2\varphi) - mgl\cos\varphi$.

Уравнението на Лагранж от втори род е

(16) $\quad \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = 0$

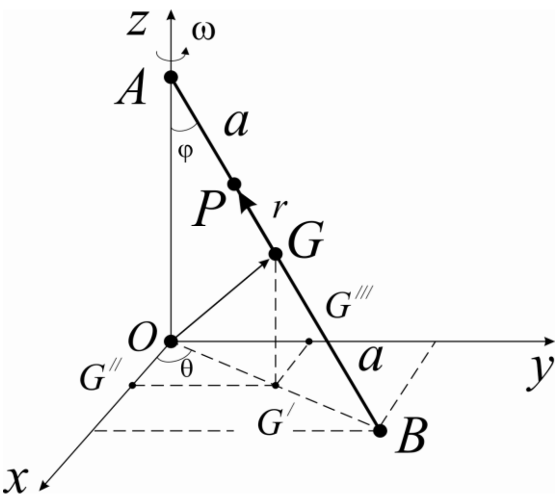
$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial\varphi} = \dfrac{2}{3}ml^2\omega^2 2\sin\varphi\cos\varphi - mgl(-\sin\varphi) \\ \dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \dfrac{2}{3}ml^2 2\dot\varphi = \dfrac{4}{3}ml^2\dot\varphi \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \dfrac{4}{3}ml^2\ddot\varphi \end{array}\right. .$$

След заместване на така намерените производни в (16), получаваме

(17) $\quad \dfrac{4}{3}ml^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi + mgl\sin\varphi - \dfrac{4}{3}ml^2\ddot\varphi = 0 \qquad \left|.\times\dfrac{-3}{4ml^2}\right.$

(18) $\quad \ddot\varphi - \omega^2\sin\varphi\cos\varphi = \dfrac{3}{4l}g\sin\varphi$.

Това е ОДУ от втори ред за намирането на неизвестната функция $\varphi = \varphi(t)$.



✸ **Задача 7.2 (**Стр. 37/Зад. 211**)**

Да се определи движението на тежка, тънка и хомогенна пръчка AB с дължина $2a$ и маса m, единият край B на която се движи по постоянна хоризонтална равнина Oxy, а другият ѝ край A – по постоянна вертикална ос Oz.

Решение: търси се уравнението на движение на пръчката AB (*нейния център на* *масите*). В качеството на обобщени координати избираме ъглите θ и φ.

(1) $L = T - U$

(2) $T = T_{Пост} + T_{Върт}$.

Нека изразим $\vec{r}_G \equiv \overrightarrow{OG}$ и $\vec{r} \equiv \overrightarrow{GP}$ посредством обобщените координати:

(3) $\vec{r}_G = a\sin\varphi\cos\theta\,\vec{i} + a\sin\varphi\sin\theta\,\vec{j} + a\cos\varphi\,\vec{k}$,

следователно

(4) $$\dot{\vec{r}}_G = a\cos\varphi\dot{\varphi}\cos\theta\vec{i} + a\sin\varphi(-\sin\theta)\dot{\theta}\vec{i} + a\cos\varphi\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{j} + a\sin\varphi\cos\theta\dot{\theta}\,\vec{j} +$$
$$+ a(-\sin\varphi)\,\dot{\varphi}\vec{k} = a(\cos\varphi\dot{\varphi}\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta\dot{\theta})\,\vec{i} +$$
$$+ a(\cos\varphi\dot{\varphi}\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta\dot{\theta})\,\vec{j} - a\sin\varphi\dot{\varphi}\vec{k}$$

$$\dot{\vec{r}}_G^{\,2} = a^2(\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2\cos^2\theta - 2\cos\varphi\cos\theta\sin\varphi\sin\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \sin^2\varphi\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2) +$$
$$+ a^2(\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + 2\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi\cos\theta\dot{\varphi}\dot{\theta} + \sin^2\varphi\,\cos^2\theta\dot{\theta}^2) + a^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 =$$
$$= a^2(\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2\cos^2\theta + \cos^2\varphi\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \sin^2\varphi\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \sin^2\varphi\cos^2\theta\dot{\theta}^2) + a^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 =$$
$$= a^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + a^2\sin^2\varphi\dot{\theta}^2 + a^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 = a^2\,\dot{\varphi}^2 + a^2\sin^2\varphi\dot{\theta}^2 = a^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2)$$, т.е.

(5) $\dot{\vec{r}}_G^{\,2} = a^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2)$.

Разсъждавайки и работейки по същия начин получаваме, че

(6) $\overrightarrow{GP} = r^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2)$.

Остава да заместим (5) и (6) в израза за кинетичната енергия на идеално твърдо тяло

(7) $$T = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}_G^{\,2} + \frac{m}{2a}\int_0^a \dot{GP}^2\,dr = \frac{1}{2}ma^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2) + \frac{m}{2a}\int_0^a r^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2)\,dr =$$
$$= \frac{1}{2}ma^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2) + \frac{m}{2a}(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2)\int_0^a r^2\,dr =$$
$$= \frac{ma^2}{2}(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2) + \frac{m}{2a}(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2)\frac{a^3}{3} = \frac{2}{3}ma^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2).$$

Потенциалната енергия на пръчката е

(8) $U = mg\,y_G = mga\cos\varphi$.

Лагранжианът е

(9) $$L = T - U = \frac{2}{3}ma^2(\dot{\varphi}^2 + \sin^2\varphi\dot{\theta}^2) - mga\cos\varphi.$$

Уравненията на Лагранж от втори род са две – за всяка от двете обобщени координати:

А) Уравнение за θ:

(10) $$\frac{\partial L}{\partial\theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = 0.$$

Понеже $\dfrac{\partial L}{\partial\theta} = 0$, то очевидно θ е циклична променлива. Това означава, че съгласно (10) ще имаме $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = 0$, т.е. функцията $\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = C_1$ ще бъде интеграл на движението:

(11) $$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}} = \frac{2}{3}ma^2\sin^2\varphi\,2\dot{\theta} \equiv \frac{4}{3}ma^2\sin^2\varphi\,\dot{\theta} = C_1.$$

Така достигаме до уравнението

(12) $\sin^2\varphi\dot{\theta} = C_1^*$,

където $C_1^* = C_1 / \frac{4}{3} m a^2$ е интеграционна константа.

Очевидно от (12) може да бъде определена производната

(13) $\dot{\theta} = \dfrac{C_1^*}{\sin^2\varphi}$.

Б) Уравнението за φ:

(14) $\dfrac{\partial L}{\partial\varphi} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 0$

$$\left| \begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial\varphi} = \frac{2}{3} m a^2 2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2 - mgl(-\sin\varphi) \\ &\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{2}{3} m a^2 2\dot{\varphi} = \frac{4}{3} m a^2 \dot{\varphi} \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{4}{3} m a^2 \ddot{\varphi} \end{aligned} \right. .$$

Тогава уравнението на Лагранж (14) добива вида

(15) $\dfrac{4}{3} m a^2 \sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2 + mga\sin\varphi - \dfrac{4}{3} m a^2 \ddot{\varphi} = 0 \qquad \Big| .\times \dfrac{-3}{4ma^2}$

(18) $\ddot{\varphi} - \sin\varphi\cos\varphi\dot{\theta}^2 - \dfrac{3}{4}\dfrac{g}{a}\sin\varphi = 0$.

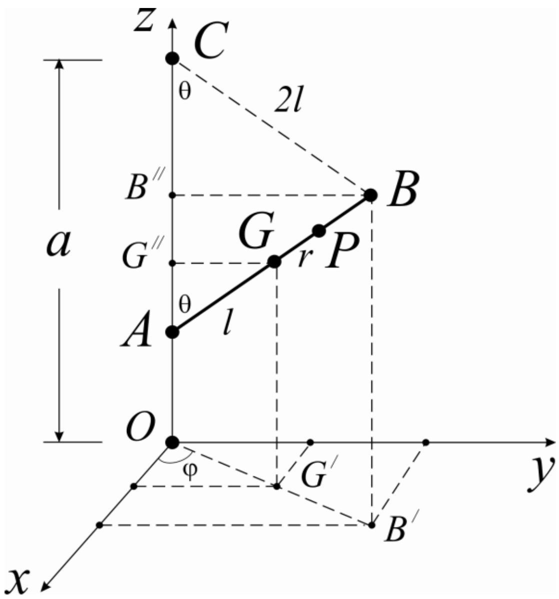
След заместване на (13) в (18) получаваме

(19) $\ddot{\varphi} - \dfrac{\cos\varphi . C_1^2}{\sin^3\varphi} - \dfrac{3}{4}\dfrac{g}{a}\sin\varphi = 0$.

Това е ОДУ от втори ред за намирането на неизвестната функция $\varphi = \varphi(t)$, след определянето на която може, с помощта на (13), да бъде определена и другата неизвестна функция $\theta = \theta(t)$.

✸ **Задача 7.3 (**Стр. 37/Зад. 213**)**

Да се определи движението на тежка, тънка и хомогенна пръчка АВ с маса m и дължина $2l$, единият край А на която се движи по постоянна вертикална ос Oz, а другият й край В е свързан с гъвкава, неразтеглива и безтегловна нишка $BO^{/}$ (с дължина 2ℓ) с неподвижната точка $O^{/}(0,0,a)$.



Решение: за обобщени координати избираме ъглите θ и φ.

(1) $\quad L = T - U$

(2) $\quad T = T_{Пост} + T_{Върт}$,

където

(3) $\quad T_{Пост} = \dfrac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_G^{\,2}$

(4) $\quad T_{Върт} = m_0 \int\limits_0^l \dot{GP}^2\, dr$,

а $\quad m_0 = \dfrac{m}{2l} \quad$ е маса на единица дължина от пръчката.

Нека изразим $\vec{r}_G \equiv \overrightarrow{OG}$ и $\vec{r} \equiv \overrightarrow{GP}$ посредством обобщените координати:

(5) $\quad \vec{r}_G = x_G \vec{i} + y_G \vec{j} + z_G \vec{k}$,

като

(5^А) $\quad x_G = AG \sin\theta \cos\varphi \equiv l \sin\theta \cos\varphi$,

(5^Б) $\quad y_G = AG \sin\theta \sin\varphi \equiv l \sin\theta \sin\varphi$,

(5^В) $\quad z_G = AC - B''C - G''B'' = a - 2l\cos\theta - l\cos\theta = a - 3l\cos\theta$.

Тогава очевидно

(6) $\quad \vec{r}_G = l\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + l\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + (a - 3l\cos\theta)\vec{k}$

(7) $\quad \dot{\vec{r}}_G = l\cos\theta\dot{\theta}\cos\varphi\vec{i} + l\sin\theta(-\sin\varphi)\dot{\varphi}\vec{i} + l\cos\theta\dot{\theta}\sin\varphi\vec{j} +$

$+ l\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi}\vec{j} - 3l(-\sin\theta)\dot{\theta}\vec{k} = l(\cos\theta\dot{\theta}\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi})\vec{i} +$

$+ l(\cos\theta\dot{\theta}\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi})\vec{j} + 3l\sin\theta\dot{\theta}\vec{k}$

(8) $\quad \dot{\vec{r}}_G^{\,2} = l^2(\cos^2\theta\dot{\theta}^2\cos^2\varphi - 2\cos\theta\dot{\theta}\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi\dot{\varphi} + \sin^2\theta\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2) +$

$+ l^2(\cos^2\theta\dot{\theta}^2\sin^2\varphi + 2\cos\theta\dot{\theta}\sin\varphi\sin\theta\cos\varphi\dot{\varphi} + \sin^2\theta\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2) + 9l^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 =$

$= l^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2\cos^2\varphi + l^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 + l^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2\sin^2\varphi + l^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + 9l^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2$

(9) $\quad \dot{\vec{r}}_G^{\,2} = l^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + +9l^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2$.

Ако върху пръчката изберем произволна точка P, то

(10) $\quad \vec{r} = \overrightarrow{GP}\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + \overrightarrow{GP}\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + \overrightarrow{GP}\cos\theta\vec{k}$, т.е.

(11) $\quad \vec{r} = r\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}$.

Лесно се установява, че

(12) $\quad \dot{\vec{r}}^{\,2} = r^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + r^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 = r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$.

Тогава съгласно (3) и (8) кинетичната енергия на постъпателно движение ще бъде

(13) $\quad T_{Пост} = \dfrac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_G^{\,2} = \dfrac{1}{2} m (l^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + 9l^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2) =$

$= \dfrac{1}{2} m (l^2\cos^2\theta\dot{\theta}^2 + l^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2 + \underbrace{l^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2 + 8l^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2}) =$

$$=\frac{1}{2}m(l^2\dot{\theta}^2+l^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2+8l^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2)=\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)+4ml^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2.$$

А съгласно (4) и (12) кинетичната енергия на въртеливото движение относно центъра на масите G ще бъде

$$(14)\quad T_{Върт}=m_0\int_0^l \dot{GP}^2\,dr=\frac{m}{2l}\int_0^l r^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)\,dr=\frac{m(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)}{2l}\int_0^l r^2\,dr=$$

$$=\frac{m(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)}{2l}\frac{l^3}{3}=\frac{ml^2}{6}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2).$$

След събирането на (13) и (14) получаваме пълната кинетична енергия на тялото

$$(15)\quad T=T_{Пост}+T_{Върт}=\frac{ml^2}{2}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)+4ml^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2+\frac{ml^2}{6}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)=$$

$$=\frac{2}{3}ml^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)+4ml^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2.$$

Потенциалната енергия на пръчката е

$$(16)\quad U=mg\,z_G=mg(a-3l\cos\theta).$$

Тогава лагранжианът добива вида

$$(17)\quad L=T-U=\frac{2}{3}ml^2(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\varphi}^2)+4ml^2\sin^2\theta\dot{\theta}^2-mg(a-3l\cos\theta).$$

Очевидно $L=L(\theta,\dot{\theta},\dot{\varphi})$, т.е. φ е циклична променлива (*обобщена координата*).

Уравненията на Лагранж от втори род са две – за всяка от двете обобщени координати:

А) Уравнение за φ:

$$(18)\quad \frac{\partial L}{\partial\varphi}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=0.$$

Понеже $\frac{\partial L}{\partial\varphi}=0$, то $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=0$, т.е. функцията

$$(19)\quad \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=C_1'$$

е интеграл на движението, или в явен вид

$$(20)\quad \frac{2}{3}ml^2\sin^2\theta(2\dot{\varphi})=C_1' \qquad \Big|\times\frac{3}{4}\frac{1}{ml^2}$$

$$(21)\quad \sin^2\theta\dot{\varphi}=C_1,$$

където $C_1=\frac{3C_1'}{4ml^2}$. Това е ОДУ от първи ред за определянето на неизвестната функция $\varphi=\varphi(t)$. Очевидно можем да изразим $\dot{\varphi}$ от (21)

$$(22)\quad \dot{\varphi}=\frac{C_1}{\sin^2\theta}.$$

Б) Уравнение за θ:

$$(23)\quad \frac{\partial L}{\partial\theta}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=0.$$

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=\dfrac{2}{3}ml^2(2\sin\theta\cos\theta)\dot{\varphi}^2+4ml^2(2\sin\theta\cos\theta)\dot{\theta}^2-mg(-3l(-\sin\theta))=$

$$=\frac{2}{3}ml^2\sin 2\theta\dot{\varphi}^2+4ml^2\sin 2\theta\dot{\theta}^2-3mgl\sin\theta.$$

☞ $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\dfrac{2}{3}ml^2(2\dot{\theta})+4ml^2\sin^2\theta(2\dot{\theta})=\dfrac{4}{3}ml^2\dot{\theta}+8ml^2\sin^2\theta\dot{\theta}.$

☞ $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}=\dfrac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}+8ml^2.2\sin\theta\cos\theta\dot{\theta}^2+8ml^2\sin^2\theta\ddot{\theta}=$

$$=\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}+8ml^2\sin 2\theta\dot{\theta}^2+8ml^2\sin^2\theta\ddot{\theta}.$$

Тогава уравнението на Лагранж (14) добива вида

$$\frac{2}{3}ml^2\sin 2\theta\dot{\varphi}^2+4ml^2\sin 2\theta\dot{\theta}^2-3mgl\sin\theta-\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}-8ml^2\sin 2\theta\dot{\theta}^2-8ml^2\sin^2\theta\ddot{\theta}=0$$

$$\frac{2}{3}ml^2\sin 2\theta\dot{\varphi}^2-3mgl\sin\theta-\frac{4}{3}ml^2\ddot{\theta}-4ml^2\sin 2\theta\dot{\theta}^2-8ml^2\sin^2\theta\ddot{\theta}=0 \qquad \Big|\times(3/ml)$$

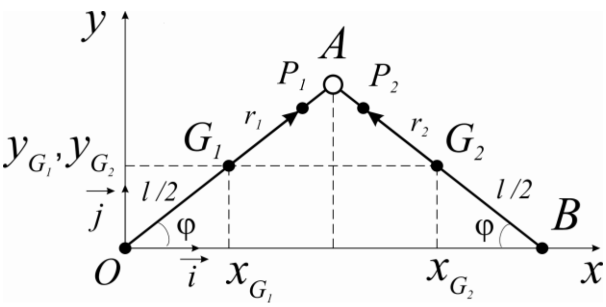
След заместване на $\dot{\varphi}$ от (22), получаваме

(24) $\quad 2l\dfrac{\sin 2\theta C_1^{\,2}}{\sin^4\theta}-9g\sin\theta-4l\ddot{\theta}-12l\sin 2\theta\dot{\theta}^2-24l\sin^2\theta\ddot{\theta}=0,$

което е търсеното уравнение на Лагранж (ОДУ от втори ред) относно променливата $\theta=\theta(t)$.

✸ **Задача 7.4 (**Стр. 37/Зад. 216**)**

Да се определи движението на системата, изобразена на фигурата, където *OA* и *AB* са две тежки тънки и хомогенни пръчки с еднаква маса m и с еднакви дължини ℓ, шарнирно свързани в точка *A*. Движението става в постоянна вертикална равнина *Oxy*, като точката *O* е неподвижна, а точката *B* се хлъзга по хоризонталната ос *Ox*.



Решение: избираме ъгъл φ за обобщена координата на цялата система (*лесно може да се покаже, че броят на степените на свобода за тази система е* $s=1$).

Лагранжианът на системата ще бъде:

(1) $\quad L=T-U,$

където $T=T_1+T_2$ и $U=U_1+U_2$. За да определим енергиите на двете тела (двете шарнирно свързани пръчки), най-напред ще определим координатите (*радиус-векторите*) на техните центрове на масите $\vec{r}_{G1}$ и $\vec{r}_{G2}$:

(2) $\quad \vec{r}_{G1}=x_{G1}\vec{i}+y_{G1}\vec{j}=\dfrac{l}{2}\cos\varphi\vec{i}+\dfrac{l}{2}\sin\varphi\vec{j};$

$$\vec{r}_{G2}=x_{G2}\vec{i}+y_{G2}\vec{j}=(x_A+x_{G1})\vec{i}+y_{G1}\vec{j}=\left(l\cos\varphi+\frac{l}{2}\cos\varphi\right)\vec{i}+\frac{l}{2}\sin\varphi\vec{j}, \text{ т.е.}$$

(3) $\quad \vec{r}_{G2}=\dfrac{3l}{2}\cos\varphi\vec{i}+\dfrac{l}{2}\sin\varphi\vec{j}.$

Определяме и производните по времето на тези радиус-вектори

(4) $\quad \dot{\vec r}_{G_1} = \dfrac{l}{2}(-\sin\varphi\dot\varphi)\vec i + \dfrac{l}{2}\cos\varphi\dot\varphi\,\vec j\,, \;\Rightarrow \qquad$ (5) $\quad \dot{\vec r}_{G_1}^{\,2} = \dfrac{l^2}{4}\dot\varphi^2.$

(6) $\quad \dot{\vec r}_{G_2} = \dfrac{3l}{2}(-\sin\varphi\dot\varphi)\vec i + \dfrac{l}{2}\cos\varphi\dot\varphi\,\vec j\,,$

откъдето

$$\dot{\vec r}_{G_1}^{\,2} = \frac{9l^2}{4}\sin^2\varphi\dot\varphi^2 + \frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\dot\varphi^2 = \frac{8l^2}{4}\sin^2\varphi\dot\varphi^2 + \frac{l^2}{4}\sin^2\varphi\dot\varphi^2 + \frac{l^2}{4}\cos^2\varphi\dot\varphi^2\,,$$

(7) $\quad \dot{\vec r}_{G_1}^{\,2} = \dfrac{l^2}{4}\dot\varphi^2 + 2l^2\sin^2\varphi\dot\varphi^2.$

Нека определим и радиус-векторите $\vec r_1$ и $\vec r_2$ на двете произволно избрани върху пръчките точки P_1 и P_2:

(8) $\quad \vec r_1 \equiv \overrightarrow{G_1P_1} = r_1\cos\varphi\vec i + r_1\sin\varphi\,\vec j$, следователно

(9) $\quad \dot{\vec r}_1 = r_1(-\sin\varphi\dot\varphi)\vec i + r_1\cos\varphi\dot\varphi)\vec j\,, \qquad \Rightarrow \qquad$ (10) $\quad \dot{\vec r}_1^{\,2} = r_1^2\,\dot\varphi^2.$

(11) $\quad \vec r_2 \equiv \overrightarrow{G_2P_2} = -\underbrace{G_2P_2}_{r_2}\cos\varphi\vec i + \underbrace{G_2P_2}_{r_2}\sin\varphi\,\vec j = r_2(-\cos\varphi\vec i + \sin\varphi\,\vec j)\,,$

следователно

(12) $\quad \dot{\vec r}_2 = r_2(\sin\varphi\dot\varphi)\vec i + r_1\cos\varphi\dot\varphi)\vec j\,, \qquad \Rightarrow \qquad$ (13) $\quad \dot{\vec r}_2^{\,2} = r_2^2\,\dot\varphi^2.$

Нека чрез тези радиус-вектори и техните производни изразим кинетичните и потенциалните енергии на телата:

(14) $\quad T_{1\text{Пост}} = \dfrac{1}{2}m\dot{\vec r}_{G_1}^{\,2} = \dfrac{1}{2}m\dfrac{l^2}{4}\dot\varphi^2 \equiv \dfrac{ml^2}{8}\dot\varphi^2.$

(15) $\quad T_{1\text{Върт}} = m_0\displaystyle\int_0^{l/2}\dot{\overline{G_1P_1}}^{\,2}\,dr_1 = \dfrac{m}{l}\int_0^{l/2} r_1^2\dot\varphi^2\,dr_1 = \dfrac{m}{l}\dot\varphi^2\,\dfrac{r_1^3}{3}\Bigg|_0^{l/2} = \dfrac{m}{l}\dot\varphi^2\,\dfrac{l^3}{3.8} = \dfrac{1}{3}\dfrac{ml^2}{8}\dot\varphi^2.$

След сумирането на (14) и (15) определяме пълната кинетична енергия на първото тяло

(16) $\quad T_1 = T_{1\text{Пост}} + T_{1\text{Върт}} = \dfrac{ml^2}{8}\dot\varphi^2 + \dfrac{1}{3}\dfrac{ml^2}{8}\dot\varphi^2 = \dfrac{4}{3}\dfrac{ml^2}{8}\dot\varphi^2 \equiv \dfrac{1}{3}\dfrac{ml^2}{2}\dot\varphi^2.$

По аналогичен начин получаваме и за другото тяло

(17) $\quad T_{2\text{Пост}} = \dfrac{1}{2}m\dot{\vec r}_{G_2}^{\,2} = \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{l^2}{4}\dot\varphi^2 + 2l^2\sin^2\varphi\dot\varphi^2\right) = \dfrac{ml^2}{8}\dot\varphi^2 + ml^2\sin^2\varphi\dot\varphi^2.$

(18) $\quad T_{2\text{Върт}} = m_0\displaystyle\int_0^{l/2}\dot{\overline{G_2P_2}}^{\,2}\,dr_2 = \dfrac{m}{l}\int_0^{l/2} r_2^2\dot\varphi^2\,dr_2 = \dfrac{m}{l}\dot\varphi^2\,\dfrac{r_2^3}{3}\Bigg|_0^{l/2} = \dfrac{m}{l}\dot\varphi^2\,\dfrac{l^3}{3.8} = \dfrac{1}{3}\dfrac{ml^2}{8}\dot\varphi^2.$

След сумирането на (17) и (18) определяме пълната кинетична енергия на второто тяло

(19) $\quad T_2 = T_{2\text{Пост}} + T_{2\text{Върт}} = \dfrac{ml^2}{8}\dot\varphi^2 + ml^2\sin^2\varphi\dot\varphi^2 + \dfrac{1}{3}\dfrac{ml^2}{8}\dot\varphi^2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{ml^2}{2}\dot\varphi^2 + ml^2\sin^2\varphi\dot\varphi^2.$

След събирането на T_1 от (16) и T_2 от (19) получаваме пълната кинетична енергия на системата

(20) $\quad T = T_1 + T_2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{ml^2}{2}\dot\varphi^2 + \dfrac{1}{3}\dfrac{ml^2}{2}\dot\varphi^2 + ml^2\sin^2\varphi\dot\varphi^2 = \dfrac{1}{3}ml^2\dot\varphi^2 + ml^2\sin^2\varphi\dot\varphi^2.$

И така

$$(21)\qquad T = ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 .$$

Потенциалната енергия на двете тела, имащи една и съща височина $y_{G_1} = y_{G_2}$ на своите центрове на масите, ще бъде

$$(22)\qquad U = U_1 + U_2 = mgy_{G_1} + mgy_{G_2} = 2mgy_{G_1} = 2mg\frac{l}{2}\sin\varphi = mgl\sin\varphi .$$

Накрая определяме лагранжиана на системата:

$$(23)\qquad L = T - U = ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi}^2 - mgl\sin\varphi .$$

Уравнението на Лагранж е

$$(24)\qquad \frac{\partial L}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 0 .$$

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi} = ml^2(2\sin\varphi\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 - mgl(\cos\varphi) = 2ml^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi ;$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 2ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\dot{\varphi} ;$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = 2ml^2(2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi})\dot{\varphi} + 2ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\ddot{\varphi} = 4ml^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + 2ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\ddot{\varphi}$$

След заместване на намерените производни в (24) получаваме

$$2ml^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi - 4ml^2\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 - 2ml^2\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\ddot{\varphi} = 0 ,$$

След разделяне на двете страни на горното равенство с $(-ml)$ получаваме

$$-2l\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + g\cos\varphi + 4l\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + 2l\left(\frac{1}{3}+\sin^2\varphi\right)\ddot{\varphi} = 0 \qquad \Big|\times 3$$

$$(25)\qquad 2l(1+3\sin^2\varphi)\ddot{\varphi} + 6l\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}^2 + 3g\cos\varphi = 0 .$$

Очевидно това е търсеното уравнение за функцията $\varphi = \varphi(t)$, описваща движението на системата във всеки момент време.

Тема 8: Функция на Хамилтон. Уравнения на Хамилтон

Теоретичен минимум: при метода на Хамилтон за описанието на една механична система като напълно равноправни независими променливи участват както s-те на брой **обобщени координати** $q_i(t)$, така и s-те на брой **обобщени импулси**

$$(\Phi.1)\qquad p_i(t) = \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial\dot{q}_i} \qquad \text{за } i = 1,2,\ldots,s .$$

Прието е **обобщените координати** q_i и **обобщените импулси** p_i да се наричат **канонични променливи**. С тяхното въвеждане се дефинира **функцията на Хамилтон**

$$(\Phi.2)\qquad H(p,q,t) = \sum_{i=1}^{s} p_i\,\dot{q}_i - L(q,\dot{q},t) .$$

Функцията на Хамилтон може да се изрази още и чрез **пълната механична енергия** на системата

(Ф.3) $H(p,q,t) = T + U \equiv E$.

Тъй като функцията на Лагранж $L = L(q,\dot{q})$, то нейният пълен диференциал по тези променливи може да бъде представен във вида

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i .$$

Ако в горното уравнение вземем под внимание, че по дефиниция за обобщени импулси $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, съгласно уравненията на Лагранж $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \dot{p}_i$, то за пълния диференциал на лагранжиана получаваме

(Ф.4) $$dL = \sum_i \dot{p}_i\, dq_i + \sum_i p_i\, d\dot{q}_i .$$

Ако отчетем връзката (Ф.2) между функциите на Лагранж и Хамилтон, то за пълния диференциал на последната ще е в сила

$$dH = d\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, \dot{q}_i\right) - dL = \sum_i dp_i\, \dot{q}_i + \sum_i p_i\, d\dot{q}_i - \sum_i \dot{p}_i\, dq_i - \sum_i p_i\, d\dot{q}_i \text{, т.е.}$$

(Ф.5) $$dH = -\sum_i \dot{p}_i\, dq_i + \sum_i \dot{q}_i\, dp_i .$$

Ако вземем под внимание, че пълният диференциал на функцията на Хамилтон може да се представи още във вида

(Ф.6) $$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i ,$$

то от сравняването на (Ф.5) и (Ф.6) получаваме **уравненията на Хамилтон** (*канонични уравнения*):

(Ф.7) $$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \text{за } i = 1,2,\ldots,s \text{, и}$$

(Ф.8) $$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \text{за } i = 1,2,\ldots,s .$$

Функция на Хамилтон за частица с маса m, движеща се в поле $U = U(\vec{r})$:

а.) в **декартови координати**

(Ф.0) $$H = \frac{1}{2m}({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2) + U(x,y,z) .$$

б.) в **цилиндрични координати**

(Ф.10) $$H = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + U(r,\varphi, z) .$$

в.) в **сферични координати**

(Ф.11) $$H = \frac{1}{2m}({p_r}^2 + \frac{{p_\theta}^2}{r^2} + \frac{{p_\varphi}^2}{r^2 \sin^2\theta}.) + U(r,\theta,\varphi) .$$

✸ **Задача 8.1 (**Стр. 45/зад. 249[А, Б, В])

Да се определи хамилтоновата функция на материална точка с маса m, движеща се в потенциално поле $U(\vec{r})$, ако обобщените координати на същата са:

а) декартовите й координати x, y, z;

б) цилиндричните й координати r, φ, z, и

в) сферичните й координати r, θ, φ.

Решение:

а) най-напред определяме кинетичната и потенциалната енергии

(1) $$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \qquad U = U(x, y, z).$$

Тогава функцията на Лагранж ще бъде

(2) $$L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z).$$

По дефиниция обобщените импулси се изразяват посредством функцията на Лагранж

(3) $$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1,..,s$$

В случая те са съответно

(4) $$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}; \qquad p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}; \qquad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}.$$

Функцията на Хамилтон е

(5) $$H = T + U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z).$$

Ако производните на обобщените координати изразим от (4) посредством обобщените импулси, след което ги заместим в (5), ще получим

(6) $$H = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_x}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_y}{m}\right)^2 + \left(\frac{p_z}{m}\right)^2\right] + U(x, y, z) = \frac{1}{2m}({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2) + U(x, y, z).$$

Уравненията на Хамилтон (*канонични уравнения*) са

(7) $$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \text{за } i = 1, 2, \ldots, s, \text{ и}$$

(8) $$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \text{за } i = 1, 2, \ldots, s.$$

В конкретния случай $s = 3$ и каноничните уравнения са 3+3 ОДУ от първи ред:

(9.1) $$\dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} = F_x;$$

(9.2) $$\dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial y} = F_y;$$

(9.3) $$\dot{p}_z = -\frac{\partial H}{\partial z} = -\frac{\partial U}{\partial z} = F_z; \text{ и}$$

(9.4) $$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{p_x}{m};$$

(9.5) $\dot{y} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y} = \dfrac{p_y}{m}$;

(9.6) $\dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} = \dfrac{p_z}{m}$.

б) Връзката между декартови (x, y, z) и цилиндрични (r, φ, z) координати се дава със съотношенията

(10) $\left| \begin{array}{l} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi, \\ z = z \end{array} \right.$ или още

(11) $\vec{r} = r.\cos\varphi\,\vec{i} + r.\sin\varphi\,\vec{j} + z\,\vec{k}$.

От (10) непосредствено определяме

(12) $\left| \begin{array}{l} \dot{x} = \dot{r}.\cos\varphi - r.\sin\varphi.\dot{\varphi} \\ \dot{y} = \dot{r}.\sin\varphi + r.\cos\varphi.\dot{\varphi} \\ \dot{z} = \dot{z} \end{array} \right.$

Следователно кинетичната енергия ще бъде

(13) $T = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \dfrac{m}{2}\{(\dot{r}.\cos\varphi - r.\sin\varphi.\dot{\varphi})^2 + (\dot{r}.\sin\varphi + r.\cos\varphi.\dot{\varphi})^2 + \dot{z}^2\} =$

$= \dfrac{m}{2}\{\dot{r}^2.\cos^2\varphi - 2r\dot{r}.\sin\varphi\cos\varphi.\dot{\varphi} + r^2.\sin^2\varphi.\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2.\sin^2\varphi + 2r\dot{r}.\sin\varphi\cos\varphi.\dot{\varphi} + r^2.\cos^2\varphi.\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\} =$

$= \dfrac{m}{2}\{\dot{r}^2 + r^2.\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\}$

Тогава функцията на Лагранж ще бъде

(14) $L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) = T - U = \dfrac{m}{2}\{\dot{r}^2 + r^2.\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\} - U(r, \varphi, z)$.

По дефиниция обобщените импулси се изразяват посредством функцията на Лагранж

(15) $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1,..,s$

В случая те са съответно

(16) $p_r = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$; $\quad p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}$; $\quad p_z = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$.

Функцията на Хамилтон е

(17) $H = T + U = \dfrac{m}{2}\{\dot{r}^2 + r^2.\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\} + U(r, \varphi, z)$.

Ако производните на обобщените координати изразим от (16) посредством обобщените импулси, след което ги заместим в (17), ще получим

(18) $H = \dfrac{m}{2}\left[\left(\dfrac{p_r}{m}\right)^2 + r^2.\left(\dfrac{p_\varphi}{mr^2}\right)^2 + \dot{z}^2\right] + U(r, \varphi, z) = \dfrac{1}{2m}\left[p_r^{\ 2} + \dfrac{p_\varphi^{\ 2}}{r^2} + \dot{z}^2\right] + mgz$.

Накрая определяме и каноничните уравнения:

(19.1) $\dot{p}_r = -\dfrac{\partial H}{\partial r} = -\dfrac{p_\varphi^{\ 2}}{2m}\left(\dfrac{-2}{r^3}\right) - \dfrac{\partial U}{\partial r} = \dfrac{p_\varphi^{\ 2}}{mr^3} + F_r$

(19.2) $\dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial U}{\partial \varphi}$;

(19.3) $\dot{p}_z = -\dfrac{\partial H}{\partial z} = -\dfrac{\partial U}{\partial z} = F_z$; и

(19.4) $\dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m}$;

(19.5) $\dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{mr^2}$;

(19.6) $\dot{z} = \dfrac{\partial H}{\partial p_z} = \dfrac{p_z}{m}$.

в) най-напред определяме кинетичната и потенциалната енергии

Връзката между декартови (x, y, z) и сферични (r, θ, φ) координати се дава със съотношенията

(20) $$\left| \begin{aligned} x &= r.\sin\theta.\cos\varphi \\ y &= r.\sin\theta.\sin\varphi \\ z &= r.\cos\theta \end{aligned} \right.$$

В сила е следното представяне за радиус-вектора на точка в сферични координати:

(21) $\vec{r} = r.\vec{e}_r$.

От (20) получаваме непосредствено

(21) $$\left| \begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}.\sin\theta.\cos\varphi + r.\cos\theta.\dot{\theta}\cos\varphi - r.\sin\theta.\sin\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{y} &= \dot{r}.\sin\theta.\sin\varphi + r.\cos\theta..\dot{\theta}\sin\varphi + r.\sin\theta.\cos\varphi\dot{\varphi} \\ \dot{z} &= \dot{r}.\cos\theta - r.\sin\theta.\dot{\theta} \end{aligned} \right.$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{m}{2}\{(\dot{r}.\sin\theta.\cos\varphi + r.\cos\theta.\dot{\theta}\cos\varphi - r.\sin\theta.\sin\varphi\dot{\varphi})^2 +$$
$$+(\dot{r}.\sin\theta.\sin\varphi + r.\cos\theta.\dot{\theta}\sin\varphi + r.\sin\theta.\cos\varphi\dot{\varphi})^2 + (\dot{r}.\cos\theta - r.\sin\theta.\dot{\theta})^2\} =$$

$$= \frac{m}{2}\{\dot{r}^2.\sin^2\theta.\cos^2\varphi + r^2.\cos^2\theta.\dot{\theta}^2\cos^2\varphi + r^2.\sin^2\theta.\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{r}.\sin\theta.\cos^2\varphi\cos\theta.\dot{\theta} -$$
$$-2r\dot{r}.\sin^2\theta.\cos\varphi.\sin\varphi\dot{\varphi} - 2r^2.\cos\theta.\dot{\theta}\cos\varphi.\sin\theta.\sin\varphi\dot{\varphi} + \dot{r}^2.\sin^2\theta.\sin^2\varphi +$$
$$+r^2.\cos^2\theta..\dot{\theta}^2\sin^2\varphi + r^2.\sin^2\theta.\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + 2r\dot{r}.\sin\theta.\sin^2\varphi.\cos\theta..\dot{\theta} +$$
$$+2r\dot{r}.\sin^2\theta.\sin\varphi.\cos\varphi\dot{\varphi} + 2r^2.\cos\theta.\dot{\theta}\sin\varphi.\sin\theta.\cos\varphi\dot{\varphi} + \dot{r}^2.\cos^2\theta + r^2.\sin^2\theta.\dot{\theta}^2 -$$
$$-2r\dot{r}.\cos\theta.\sin\theta.\dot{\theta}\} =$$

$$= \frac{m}{2}\{(\dot{r}^2.\sin^2\theta.\cos^2\varphi + \dot{r}^2.\sin^2\theta.\sin^2\varphi) + (r^2.\cos^2\theta.\dot{\theta}^2\cos^2\varphi + r^2.\cos^2\theta.\dot{\theta}^2\sin^2\varphi) +$$

$$+(r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2+r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2)+(2r\dot{r}\sin\theta\cos^2\varphi\cos\theta.\dot{\theta}+2r\dot{r}\sin\theta\sin^2\varphi.\cos\theta.\dot{\theta})+$$
$$+\dot{r}^2.\cos^2\theta+r^2.\sin^2\theta.\dot{\theta}^2-2r\dot{r}.\cos\theta.\sin\theta.\dot{\theta}\}=$$

$$=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2.\sin^2\theta+r^2.\cos^2\theta.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2+$$
$$+2r\dot{r}\sin\theta\cos\theta.\dot{\theta}+\dot{r}^2.\cos^2\theta+r^2.\sin^2\theta.\dot{\theta}^2-2r\dot{r}.\cos\theta.\sin\theta.\dot{\theta}\}=$$
$$=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2.\sin^2\theta+r^2.\cos^2\theta.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2+\dot{r}^2.\cos^2\theta+r^2.\sin^2\theta.\dot{\theta}^2\}=$$
$$=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2+r^2.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\}.$$

И така кинетичната енергия в сферични координати се изразява с

$$(22)\quad T=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2+r^2.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\}$$

$$(23)\quad U=U(r,\theta,\varphi).$$

Тогава функцията на Лагранж ще бъде

$$(24)\quad L(\vec{r},\dot{\vec{r}})=T-U=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2+r^2.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\}-U(r,\theta,\varphi).$$

Обобщените импулси се изразяват посредством функцията на Лагранж

$$(25)\quad p_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i},\qquad i=1,..,s$$

В случая те са съответно

$$(26)\quad p_r=\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}=m\dot{r};\qquad p_\theta=\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=mr^2\dot{\theta};\quad p_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}.$$

Функцията на Хамилтон е

$$(27)\quad H=T+U=\frac{m}{2}\{\dot{r}^2+r^2.\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2\}+U(r,\theta,\varphi).$$

Ако производните на обобщените координати изразим от (26) посредством обобщените импулси, след което ги заместим в (27), ще получим

$$(28)\quad H=\frac{m}{2}\left[\left(\frac{p_r}{m}\right)^2+r^2.\left(\frac{p_\theta}{mr^2}\right)^2+r^2\sin^2\theta\left(\frac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}\right)^2\right]+U(r,\theta,\varphi)=$$
$$=\frac{1}{2m}\left[p_r^{\,2}+\frac{p_\theta^{\,2}}{r^2}+\frac{p_\varphi^{\,2}}{r^2\sin^2\theta}\right]+U(r,\theta,\varphi)$$

Уравненията на Хамилтон (*канонични уравнения*) са

$$(29)\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\qquad \text{за } i=1,2,\dots,s\text{, и}$$

$$(30)\quad \dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\qquad \text{за } i=1,2,\dots,s.$$

В конкретния случай $s=3$ и каноничните уравнения са 3+3 ОДУ от първи ред:

$$(31.1)\qquad \dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial r}=-\frac{1}{2m}\left(\frac{-2}{r^3}\right)\left(p_\theta^{\,2}+\frac{p_\varphi^{\,2}}{\sin^2\theta}\right)-\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{1}{mr^3}\left(p_\theta^{\,2}+\frac{p_\varphi^{\,2}}{\sin^2\theta}\right)-\frac{\partial U}{\partial r};$$

(31.2) $\dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} = -\dfrac{p_\varphi^{\ 2}}{2mr^2}\left[\dfrac{-2}{\sin^3\theta}\cos\theta\right] - \dfrac{\partial U}{\partial \theta} = \dfrac{p_\varphi^{\ 2}\cos\theta}{mr^2\sin^3\theta} - \dfrac{\partial U}{\partial \theta}$;

(31.3) $\dot{p}_\varphi = -\dfrac{\partial H}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial U}{\partial z}$; и

(31.4) $\dot{r} = \dfrac{\partial H}{\partial p_r} = \dfrac{p_r}{m}$;

(31.5) $\dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} = \dfrac{p_\theta}{mr^2}$;

(31.6) $\dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{mr^2\sin^2\theta}$.

✸ **Задача 8.2 (**Стр. 45/зад. 250**)**

(*Намиране на функция на Хамилтон по зададена функция на Лагранж*) Да се намери функцията на Хамилтон на анхармоничен осцилатор, функцията на Лагранж за който е

(1) $L(x,\dot{x}) = \dfrac{\dot{x}^2}{2} - \dfrac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta.x.\dot{x}^2$.

Решение: Обобщеният импулс (*по дефиниция*) е

(2) $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (1+2\beta.x)\,\dot{x}$,

откъдето можем да изразим $\dot{x}$ посредством обобщения импулс и да заместим в (1). Подобна операция е оправдана от гледна точка на това, че функцията на Хамилтон, която е функция на обобщената координата x и обобщения импулс p, може да се изрази посредством лагранжиана (1), когото следователно трябва да „изчистим” от присъствието на $\dot{x}$.

От (2) изразяваме $\dot{x}$:

(3) $\dot{x} = \dfrac{p}{(1+2\beta.x)}$.

Така лагранжианът (1) добива вида

(4) $L = \dfrac{(1+2\beta.x)\dot{x}^2}{2} - \dfrac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 = \dfrac{p^2}{2(1+2\beta.x)} - \dfrac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3$.

По определение функцията на Хамилтон е свързана с функцията на Лагранж посредством съотношението (Ф.2)

$$H(p,q,t) = \sum_{i=1}^{s} p_i\,\dot{q}_i - L(q,\dot{q},t),$$

или в конкретния случай ($i=1$)

(5) $H(p,x) = p.\dot{x} - L(x,\dot{x})$.

След заместване на (3) и (4) в (5) и елементарни преобразувания получаваме

$$H(p,x) = p.\dot{x} - L(x,\dot{x}) = p.\frac{p}{(1+2\beta.x)} - \frac{p^2}{2(1+2\beta.x)} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 =$$

$$= \frac{p^2}{(1+2\beta.x)} - \frac{p^2}{2(1+2\beta.x)} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 = \frac{p^2}{2(1+2\beta.x)} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3.$$

И така търсеният хамилтониан е

(6) $$H(p,x)=\frac{p^2}{2(1+2\beta.x)}+\frac{\omega^2x^2}{2}+\alpha x^3.$$

✸ **Задача 8.3 (**Стр. 45/Зад. 251**)**

(*Намиране на функция на Лагранж по зададена функция на Хамилтон*)

Да се намери функцията на Лагранж на материална точка с маса m, чиято хамилтонова функция е

(1) $$H(r,p)=\frac{p^2}{2m}-(p.A),$$

където $\vec{p}$ - импулс, а $\vec{A}$ - константен вектор.

Решение: Съгласно едното от каноничните уравнения на Хамилтон

(2) $\dot{q}\equiv\dot{r}=\dfrac{\partial H}{\partial p}=\dfrac{p}{m}-A$, откъдето (3) $p=m(\dot{r}+A)$.

Следователно

(3) $$H(r,p)=\frac{p^2}{2m}-p.A=\frac{m^2(\dot{r}+A)^2}{2m}-m(\dot{r}+A).A=\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}-m(\dot{r}+A).A.$$

По дефиниция

(3) $H(p,q,t)=\sum\limits_{i=1}^{s}p_i\,\dot{q}_i-L(q,\dot{q},t)$, т.е. (4) $H(p,r)=p.\dot{r}-L(r,\dot{r})$,

откъдето

(5) $$L(r,\dot{r})=p.\dot{r}-H(p,r)=m(\dot{r}+A).\dot{r}-\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}+m(\dot{r}+A).A=$$

$$=m(\dot{r}+A).\dot{r}+m(\dot{r}+A).A-\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}=m(\dot{r}+A)(\dot{r}+A)-\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}=$$

$$=m(\dot{r}+A)^2-\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}=\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}.$$

И така

(6) $$L(r,\dot{r})=\frac{m(\dot{r}+A)^2}{2}.$$

✸ **Задача 8.4 (**Стр. 45/зад. 254**)**

Да се намерят каноничните уравнения на Хамилтон за сферично математическо махало с маса m, ако обобщените координати на махалото са сферичните му координати θ и φ.

Решение: при радиус R на сферичната повърхност, по която се движи махалото, неговите декартови координати са свързани с обобщените (сферични) координати със съотношенията

(1) $$\left|\begin{aligned}x&=R.\sin\theta\cos\varphi\\ y&=R.\sin\theta\sin\varphi\\ z&=R.\cos\theta\end{aligned}\right.\qquad \text{при } R=const.$$

Следователно кинетичната енергия на махалото е

(2) $T = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$.

Като се има предвид следният резултат от решената вече зад. $249^{В}$

(3) $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\varphi}^2$,

то (2) може да се представи във вида

(4) $T = \dfrac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2)$.

Потенциалната енергия на махалото е

(5) $U = mgz = mgR\cos\theta$.

Хамилтонианът (независещ явно от времето) на сферичното махало е

(6) $H(\theta,\varphi,\dot{\theta},\dot{\varphi}) = T(p_\varphi) + U(\varphi) = \dfrac{m}{2}R^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\varphi}^2) + mgR\cos\theta$.

Обобщените импулси се определят както следва

(7) $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \equiv \dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$, т.е.

(8) $p_\theta = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \equiv \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mR^2\dot{\theta}$, откъдето следва ($8^{А}$) $\dot{\theta} = \dfrac{p_\theta}{mR^2}$;

(9) $p_\varphi = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \equiv \dfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}$, откъдето следва ($9^{А}$) $\dot{\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}$.

С въвеждането на обобщените импулси могат да бъдат записани каноничните уравнения (уравнения на Хамилтон):

(10) $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$, ($i = 1,2$), като по условие $q_1 = \theta$, $q_2 = \varphi$;

(11) $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, ($i = 1,2$).

Нека запишем тези 2+2 ОДУ в явен вид. Преди това е необходимо да представим хамилтониана (6) в каноничен вид, в който той да бъде представен само и единствено чрез канонични променливи (обобщени координати и обобщени импулси). За целта заместваме ($8^{А}$) и ($9^{А}$) в (6)

$$H(\theta,\varphi,p_\theta,p\varphi) = \frac{m}{2}R^2(\left(\frac{p_\theta}{mR^2}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}\right)^2) + mgl\cos\theta, \quad \text{т.е.}$$

(12) $H(\theta,\varphi,p_\theta,p\varphi) = \dfrac{1}{2mR^2}(p_\theta{}^2 + \dfrac{p_\varphi{}^2}{\sin^2\theta}) + mgR\cos\theta$.

Сега вече каноничните уравнения (10) и (11) могат да бъдат получени в явен вид. От (10) при $i = 1$ ще имаме

$$\dot{p}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -\frac{1}{2mR^2}(p_\varphi{}^2\frac{(-2)\cos\theta}{\sin^3\theta}) - mgR(-\sin\theta) =$$

$$= \frac{p_\varphi{}^2}{2mR^2}\frac{2\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\sin\theta}{\sin\theta} + mgR\sin\theta = \frac{p_\varphi{}^2}{2mR^2}\frac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta} + mgR\sin\theta, \quad \text{т.е.}$$

($13^{А}$) $\dot{p}_\theta = \dfrac{p_\varphi{}^2}{2mR^2}\dfrac{\sin 2\theta}{\sin^4\theta} + mgR\sin\theta$.

От (10) при $i = 2$ ще имаме

$$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0 \text{, т.е.}$$

(13^Б) $\dot{p}_\varphi = 0$.

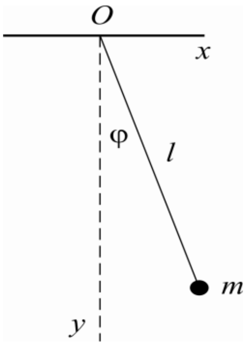
Другите две канонични уравнения следват от (11):

(14^А) $$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{\partial}{\partial p_\theta}\left(\frac{1}{2mR^2}({p_\theta}^2 + \frac{{p_\varphi}^2}{\sin^2\theta}) + mgR\cos\theta\right) = \frac{p_\theta}{mR^2};$$

(14^Б) $$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{\partial}{\partial p_\varphi}\left(\frac{1}{2mR^2}({p_\theta}^2 + \frac{{p_\varphi}^2}{\sin^2\theta}) + mgR\cos\theta\right) = \frac{p_\varphi}{mR^2\sin^2\theta}.$$

✸ **Задача 8.5 (**Стр. 45/зад. 255**)**

Като се напишат каноничните уравнения на Хамилтон за равнинно математическо махало с дължина ℓ при обобщена координата ъгълът φ на отклонение на махалото от вертикалата, да се получи от тях уравнението



$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0.$$

Решение: В качеството на обобщена координата избираме ъгъл φ. Връзката между декартови и обобщена координати се дава с:

(1) $x = l.\sin\varphi$

(2) $y = l.\cos\varphi$

Кинетичната енергия на махалото е

(3) $$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2,$$

а потенциалната му енергия е

(4) $U = -mgy = -mgl\cos\varphi$.

Функцията на Лагранж за махалото е

(5) $$L(\varphi,\dot{\varphi}) = T(\dot{\varphi}) - U(\varphi) = \frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi.$$

Тогава обобщеният му импулс е

(6) $$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi},$$

функцията на Хамилтон е

(7) $$H(\varphi, p_\varphi) = T + U = \frac{m}{2}l^2\left(\frac{p_\varphi}{ml^2}\right)^2 - mgl\cos\varphi = \frac{p^2{}_\varphi}{2ml^2} - mgl\cos\varphi,$$

а уравненията на Хамилтон са

(8) $$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$ и (9) $$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i},\ i = 1\ldots s$$

или (при $i \equiv \varphi$)

(10) $$\dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -[-mgl(-\sin\varphi)] = -mgl\sin\varphi \text{, и}$$

(11) $\quad \dot{\varphi} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \dfrac{p_\varphi}{ml^2}$.

Търсеното в задачата диференциално уравнение $\ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0$ може да бъде получено от първото от двете уравнения на Хамилтон, т.е. от (10). Действително от (10), с отчитането на (6), следва

(12) $\quad \dfrac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) = -mgl\sin\varphi$,

откъдето след диференциране и разделяне на двете страни на равенството с (ml^2) получаваме точно уравнението

(13) $\quad \ddot{\varphi} + \dfrac{g}{l}\sin\varphi = 0$.

✸ **Задача 8.6 (**Стр. 45/зад. 256**)**

Да се интегрира системата от канонични уравнения за механична система с хамилтонова функция

(1) $\quad H = \alpha\sqrt{1+\beta^2 p^2} + \gamma.q, \quad \gamma \neq 0$.

Решение: първото от двете канонични уравнения е

(2) $\quad \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} = -\gamma$, т.е.

(3) $\quad dp = -\gamma.dt$,

което се интегрира елементарно

(4) $\quad p = -\gamma.t + C_2$,

където C_2 - интеграционна константа. Второто канонично уравнение е

(5) $\quad \dot{q} = -\dfrac{\partial H}{\partial p} = \alpha.\dfrac{1}{2}\dfrac{\beta^2 2p}{\sqrt{1+\beta^2 p^2}} = \dfrac{\alpha\beta^2 p}{\sqrt{1+\beta^2 p^2}} = \dfrac{\alpha\beta^2(C_2-\gamma.t)}{\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}}$,

или още

(6) $\quad dq = \dfrac{\alpha\beta^2(C_2-\gamma.t)\,dt}{\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}}$.

Ако вземем под внимание факта, че

(7) $\quad d(C_2-\gamma.t)^2 = 2(C_2-\gamma.t)(-\gamma)\,dt = -2\gamma(C_2-\gamma.t)\,dt$,

то очевидно

(8) $\quad (C_2-\gamma.t)\,dt = -\dfrac{1}{2\gamma}d(C_2-\gamma.t)^2$.

Заместваме (8) в числителя на (6) и получаваме

$$dq = -\frac{1}{2\gamma}\frac{\alpha\beta^2\,d(C_2-\gamma.t)^2}{\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}} = -\frac{\alpha}{2\gamma}\frac{d\left[\beta^2(C_2-\gamma.t)^2\right]}{\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}} =$$

$$= -\frac{\alpha}{2\gamma}[1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2]^{-\frac{1}{2}}d\left[1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2\right], \text{ т.е.}$$

(9) $\quad dq = -\dfrac{\alpha}{2\gamma}[1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2]^{-\frac{1}{2}}d\left[1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2\right]$.

Интегрираме (9)

$$q = -\frac{\alpha}{2\gamma}\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}[1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2]^{+\frac{1}{2}} + C_1 = C_1 - \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}\ .$$

И така, решенията на каноничните уравнения са:

(10) $q(t) = C_1 - \dfrac{\alpha}{\gamma}\sqrt{1+\beta^2(C_2-\gamma.t)^2}$; (11) $p(t) = C_2 - \gamma.t$.

✸ Задача 8.7 (Стр. 45/зад. 257**)**

Да се определи закона за движение на материална точка с функция на Хамилтон

(1) $H(p,x) = p^2/2 + \omega_0^2 x^2/2 + \lambda(p^2/2 + \omega_0^2 x^2/2)^2$.

Решение: нека най-напред въведем следната вспомагателна функция

(2) $\varphi(p,x) = \dfrac{p^2}{2} + \dfrac{\omega_0^2 x^2}{2}$,

чрез която представяме хамилтонианът (1) във вида

(3) $H(p,x) = \varphi + \lambda\varphi^2$.

Каноничните уравнения за тази материална точка са

($4^А$) $\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$, и ($4^Б$) $\dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$.

За определянето на производните в ($4^{А,Б}$) нека вземем под внимание, че

($5^А$) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \omega_0^2 x$, ($5^Б$) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} = p$, ($5^В$) $\dfrac{\partial H}{\partial\varphi} = 1 + 2\lambda\varphi$.

Така определяме непосредствено

(6) $\dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{\partial H}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = (1+2\lambda\varphi)\,\omega_0^2 x$, и

(7) $\dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{\partial H}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} = (1+2\lambda\varphi)\,p$.

Заместваме така намерените производни (6) и (7) в каноничните уравнения ($4^{А,Б}$)

($8^А$) $\dot{p} = -(1+2\lambda\varphi)\,\omega_0^2 x$, и ($8^Б$) $\dot{x} = (1+2\lambda\varphi)\,p$.

Понеже φ е положително определена функция, както се вижда от (2), то $(1+2\lambda\varphi) \neq 0$, следователно можем да разделим почленно уравненията ($8^А$) и ($8^Б$):

$\dfrac{\dot{p}}{\dot{x}} = -\omega_0^2\dfrac{x}{p}$, т.е. $p\,dp = -\omega_0^2\,x\,dx$.

След като интегрираме това ОДУ с разделени променливи, получаваме

(9) $\dfrac{1}{2}p^2 = -\dfrac{1}{2}\omega_0{}^2 x^2 + Const$,

или още

(10) $\dfrac{1}{2}p^2 + \dfrac{1}{2}\omega_0{}^2 x^2 = Const \equiv \varphi(p,x)$.

Понеже лявата страна на (10) много наподобява израза за енергията на хармоничен осцилатор, приемаме, че

(11) $Const \equiv \varphi(p,x) = \frac{1}{2}\omega_0{}^2 a^2$,

където a е нова интеграционна константа, имаща смисъл на някаква своеобразна „амплитуда” на колебанията.

Връщаме се на каноничните уравнения ($8^{А}$) и ($8^{Б}$), в които заместваме функцията $\varphi(p,x)$ с нейното представяне, получено в (11):

($12^{А}$) $\dot{p} = -(1+2\lambda\frac{1}{2}\omega_0{}^2 a^2)\,\omega_0^2 x$, и ($12^{Б}$) $\dot{x} = (1+2\lambda\frac{1}{2}\omega_0{}^2 a^2)\,p$.

Нека диференцираме по времето ($12^{Б}$), след което в полученото по този начин уравнение заместим $\dot{p}$ от ($12^{А}$). Идеята на всичко това е да получим едно ОДУ от втори ред относно $x(t)$, което да е „изчистено” от присъствието на обобщения импулс $p(t)$:

(13) $\ddot{x} = (1+\lambda\omega_0{}^2 a^2)\,\dot{p} = -(1+\lambda\omega_0{}^2 a^2)^2\omega_0{}^2 x$.

Така достигнахме до уравнението

(14) $\ddot{x} + [\underbrace{(1+\lambda\omega_0{}^2 a^2)\omega_0}_{\omega}]^2 x = 0$,

което е уравнение на осцилатор, имащ честота

(15) $\omega = (1+\lambda\omega_0{}^2 a^2)\omega_0$.

С нейното въвеждане уравнение (14) добива вида;

(16) $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$.

Общото решение на това ОДУ на хармоничен осцилатор може да се представи във вида

(17) $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$,

където A и φ_0 са интеграционни константи.

Ще покажем, че $A = a$. Действително, от (15) следва, че ($12^{А}$) и ($12^{Б}$) могат да се запишат във вида

($18^{А}$) $\dot{p} = -(1+\lambda\omega_0{}^2 a^2)\,\omega_0^2 x = -\omega\,\omega_0$, и

($18^{Б}$) $\dot{x} = (1+\lambda\omega_0{}^2 a^2)\,p = \frac{\omega}{\omega_0}p$.

Ако изразим p от ($18^{Б}$), като $\dot{x}$ определим от (17), ще имаме

(19) $p = \frac{\omega_0}{\omega}\dot{x} = \frac{\omega_0}{\omega}\frac{d}{dt}[A\cos(\omega t+\varphi_0)] = \frac{\omega_0}{\omega}[-A\omega\sin(\omega t+\varphi_0)] = -\omega_0 A\sin(\omega t+\varphi_0)$.

Нека заместим x от (17) и p от (19) в (11), т.е. в

(20) $\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega_0{}^2 x^2 = \frac{1}{2}\omega_0{}^2 a^2$.

Така получаваме

$$[-\omega_0 A\sin(\omega t+\varphi_0)]^2 + \omega_0{}^2[A\cos(\omega t+\varphi_0)]^2 = \omega_0{}^2 a^2,$$

или още

(21) $\omega_0{}^2 A^2 = \omega_0{}^2 a^2$,

откъдето следва, че действително $A = a$. С отчитането на този факт решенията на системата канонични уравнения за тази частица могат да се представят във вида

$$(22)\qquad \left| \begin{array}{l} x(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0) \\ p(t) = -\omega_0 a \sin(\omega t + \varphi_0) \end{array} \right. ,$$

където интеграционните константи a и φ_0 се определят от началните условия, а честотата на колебанията

$$(23)\qquad \omega = (1 + \lambda \omega_0^{\ 2} \underbrace{a^2}_{\uparrow})\omega_0$$

зависи от амплитудата $\boxed{a}$ на тези колебания, което означава, че в тази колебателна система е налице т.нар. „параметричен резонанс".

Тема 9: Скобки на Поасон

Теоретичен минимум: Скобките на Поасон са елемент от математическия апарат на теоретичната физика, с помощта на който може да се постигне много рационален и унифициран запис на:

- уравненията на движение (*в частност уравненията на Хамилтон*), както и
- условието една функция $f(q, p, t)$ на обобщените координати и обобщените импулси да е **интеграл на движението**.

Действително, ако разгледаме пълната производна по времето на една функция $f(q, p, t)$, ще имаме

$$(\Phi.1)\qquad \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial p_k}{\partial t} \right) \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial f}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial f}{\partial p_k}\dot{p}_k \right).$$

Но съгласно уравненията на Хамилтон $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ и $\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, за $i = 1, 2, \ldots, s$.

Замествайки производните $\dot{p}_i$ и $\dot{q}_i$ в (Ф.1), получаваме

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f],\ \text{т.е.}$$

$$(\Phi.2)\qquad \boxed{\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]},$$

където

$$(\Phi.3)\qquad \boxed{[H, f] = \sum_{k=1}^{s} \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} \right)}$$

е скобка на Поасон за функциите H и f.

Ако в (Ф.3) заместим $f = p_i$ и отчетем, че $\frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_{ik}$, $\frac{\partial q_i}{\partial q_k} = \delta_{ik}$, но $\frac{\partial p_i}{\partial q_k} = \frac{\partial q_i}{\partial p_k} = 0$, то получаваме каноничните уравнения за импулсите във вида

$$(*)\qquad \dot{p}_i = [H, p_i].$$

Аналогично, ако в (Ф.3) заместим $f = q_i$, получаваме каноничните уравнения за обобщените координати във вида

$$(**)\qquad \dot{q}_i = [H, q_i].$$

Записани в този си вид чрез скобки на Поасон, каноничните уравнения са по-„регулярни”.

Както е известно, функциите от динамичните променливи (p и q напр.), които <u>остават постоянни във времето</u>, се наричат **интеграли на движението**. Както следва от (Ф.2) и от тази дефиниция, условието функцията $f(q,p,t)$ да е интеграл на движението, т.е. $\frac{df}{dt}=0$, се свежда до условието

(Ф.4) $$\boxed{\frac{\partial f}{\partial t}+[H,f]=0}.$$

Ако $f(q,p,t)$ <u>не зависи</u> **явно** от времето (*което е напълно логично изискване за интеграл на движението*), т.е. $f=f(q,p)$, то $\frac{\partial f}{\partial t}=0$ и следователно условието (Ф.4) се свежда до условието

(Ф.5) $$\boxed{[H,f]=0},$$

т.е. нейната скобка на Поасон с функцията на Хамилтон трябва да е равна на нула.

Скобки на Поасон могат да се дефинират за кои да е две функции $f(q,p,t)$ и $g(q,p,t)$ на обобщените координати и на обобщените импулси посредством съотношението

(Ф.6) $$\boxed{[g,f]=\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial g}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k}-\frac{\partial g}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)}.$$

✸ **Задача 9.1 (**Стр. 46/Зад. 266[а,б,в]**)**

✸ **а) Определете скобката на Поасон** $\{L_i,x_j\}=?$

Решение: По дефиниция

(1) $$\{L_i,x_j\}=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial L_i}{\partial p_k}\frac{\partial x_j}{\partial q_k}-\frac{\partial L_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_j}{\partial p_k}\right)$$

Моментът на импулса е $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$, следователно

(2) $$L_i=-\varepsilon_{min}x_m p_n\,.$$

Нека определим производните $\frac{\partial L_i}{\partial p_k}$ и $\frac{\partial L_i}{\partial q_k}\equiv\frac{\partial L_i}{\partial x_k}$, участващи в (1):

(3) $$\frac{\partial L_i}{\partial p_k}=-\varepsilon_{min}\frac{\partial}{\partial p_k}(x_m p_n)=-\varepsilon_{min}\frac{\partial x_m}{\partial p_k}p_n-\varepsilon_{min}x_m\frac{\partial p_n}{\partial p_k}\,.$$

Понеже обобщените координати x_j и обобщените импулси p_k ($j,k=1,.s$) са независими, то $\frac{\partial x_m}{\partial p_k}\equiv 0$, а $\frac{\partial p_n}{\partial p_k}=\delta_{kn}$. Така получаваме

(4) $$\frac{\partial L_i}{\partial p_k}=-\varepsilon_{min}x_m\delta_{kn}=-\varepsilon_{mik}x_m=\varepsilon_{imk}x_m\,.$$

По аналогичен начин определяме и

(5) $$\frac{\partial L_i}{\partial x_k}=-\varepsilon_{min}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_m p_n)=-\varepsilon_{min}\frac{\partial x_m}{\partial x_k}p_n-\varepsilon_{min}x_m\frac{\partial p_n}{\partial x_k}\,.$$

Тук отново отчитаме, че понеже обобщените координати x_j и обобщените импулси p_k ($j,k=1,..s$) са независими, то $\dfrac{\partial x_m}{\partial x_k} \equiv \delta_{km}$, а $\dfrac{\partial p_n}{\partial x_k}=0$. Така получаваме

(6) $$\frac{\partial L_i}{\partial x_k} = -\varepsilon_{\min}\frac{\partial x_m}{\partial x_k}p_n = -\varepsilon_{\min}\delta_{km}p_n = -\varepsilon_{kin}p_n = \varepsilon_{kni}p_n\,.$$

Другите две производни $\dfrac{\partial x_j}{\partial q_k}$ и $\dfrac{\partial x_j}{\partial p_k}$, участващи в (1), се определят елементарно и са съответно

(7) $$\frac{\partial x_j}{\partial q_k} \equiv \frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{kj}\,,$$ и (8) $$\frac{\partial x_j}{\partial p_k}=0\,.$$

С така подготвените предварително производни (4), (6), (7) и (8) заместваме в (1), и за търсената скобка на Поасон получаваме:

(9) $$\{L_i, x_j\} = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial L_i}{\partial p_k}\frac{\partial x_j}{\partial x_k} - \frac{\partial L_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_j}{\partial p_k}\right) =$$

$$= \sum_k \{(\varepsilon_{imk}x_m).(\delta_{kj}) - (\varepsilon_{kni}p_n).(0)\} = \sum_k \varepsilon_{imk}x_m.\delta_{kj}\,.$$

Понеже съгласно правилата на алгебрата на векторните и тензорните величини по повтарящ се индекс (в случая - индекса „*к*") се извършва сумиране, то присъствието на символа за сумиране $\sum\limits_k$ в горния запис е излишно, поради което го изпускаме, и ще имаме

(10) $$\{L_i, x_j\} = \varepsilon_{imk}x_m.\delta_{kj} = \varepsilon_{imj}x_m\,.$$

И така, търсената скобка на Поасон е $\boxed{\{L_i, x_j\} = \varepsilon_{imj}x_m}$, като очевидно $\{L_i, x_j\}=0$ при $i=j$, понеже $\varepsilon_{jmj}\equiv 0$.

✸ **б) Определете скобката на Поасон** $\{L_i, p_j\} = ?$

Решение: По дефиниция

(11) $$\{L_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial L_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial x_k} - \frac{\partial L_i}{\partial x_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k}\right)$$

Производните $\dfrac{\partial L_i}{\partial p_k}$ и $\dfrac{\partial L_i}{\partial x_k}$, участващи в (11), са вече определени в (4) и (6) съответно. Остава да отчетем, че

(12) $$\frac{\partial p_j}{\partial x_k}=0\,,$$ и (13) $$\frac{\partial p_j}{\partial p_k}=\delta_{kj}\,.$$

Заместваме тези производни в (11), и получаваме

(14) $$\{L_i, p_j\} = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial L_i}{\partial p_k}\frac{\partial p_j}{\partial x_k} - \frac{\partial L_i}{\partial x_k}\frac{\partial p_j}{\partial p_k}\right) =$$

$$= \sum_k \{(\varepsilon_{imk}x_m).(0) - (\varepsilon_{kni}p_n).(\delta_{kj})\} = \sum_k (-\varepsilon_{kni}p_n.\delta_{kj}) \equiv -\varepsilon_{kni}p_n.\delta_{kj} = -\varepsilon_{jni}p_n$$

Остава да направим няколко пермутации на индексите в символа на Леви-Чевита $\rightarrow \quad -\varepsilon_{jni} = \varepsilon_{jin} = -\varepsilon_{ijn} = \varepsilon_{inj}$, след които можем да запишем окончателно

(15) $\boxed{\{L_i, p_j\} = \varepsilon_{inj} p_n}$,

което е търсената скобка на Поасон.

✸ **в) Определете скобката на Поасон** $\{L_i, L_j\} = ?$

Решение: По дефиниция

(16) $$\{L_i, L_j\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial L_i}{\partial p_k} \frac{\partial L_j}{\partial x_k} - \frac{\partial L_i}{\partial x_k} \frac{\partial L_j}{\partial p_k} \right).$$

Използваме определените вече в подусловие (а) производни, като за намиране на производните на L_j навсякъде в изразите за производните на L_i формално сменяме индекса i със j. Така получаваме

(17) $$\{L_i, L_j\} = \sum_k \{(\varepsilon_{imk} x_m).(\varepsilon_{knj} p_n) - (\varepsilon_{kni} p_n).(\varepsilon_{jmk} x_m)\}.$$

Съгласно коментираното вече правило за сумиране по повтарящ се индекс изпускаме символа за сума по „κ", и получаваме

(18) $$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{imk}\varepsilon_{knj}\, x_m . p_n - \varepsilon_{kni}\varepsilon_{jmk}\, x_m p_n \equiv (\varepsilon_{kim}\varepsilon_{knj} - \varepsilon_{kni}\varepsilon_{kjm})\, x_m p_n .$$

За произведения от символите на Леви-Чевита е в сила следното представяне чрез символите на Кронекер:

(19[а]) $\varepsilon_{kim}\varepsilon_{knj} = \delta_{in}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{mn}$, и

(19[б]) $\varepsilon_{kni}\varepsilon_{kjm} = \delta_{nj}\delta_{im} - \delta_{nm}\delta_{ij}$.

Заместваме в (18) и получаваме

$$\{L_i, L_j\} = [(\delta_{in}\delta_{mj} - \delta_{ij}\delta_{mn}) - (\delta_{nj}\delta_{im} - \delta_{nm}\delta_{ij})] x_m p_n =$$
$$= (\delta_{in}\delta_{mj} - \delta_{nj}\delta_{im})\, x_m p_n = (\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{jn}\delta_{im})\, x_m p_n = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{knm}\, x_m p_n ,$$

където е използвано, че $(\delta_{in}\delta_{jm} - \delta_{jn}\delta_{im}) = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{knm}$. По този начин за търсената скобка на Поасон получаваме

(20) $$\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{knm}\, x_m p_n = -\varepsilon_{ikj}.(-\varepsilon_{nkm}\, p_n x_m) = -\varepsilon_{ikj}.(\vec{p} \times \vec{x})_k = \varepsilon_{ikj}.(\vec{x} \times \vec{p})_k = \varepsilon_{ikj}.L_k .$$

И така търсената скобка на Поасон е

(21) $\{L_i, L_j\} = \varepsilon_{ikj}.L_k$,

като очевидно при фиксирани i и j следва $k \neq i, j$, защото в противен случай $\varepsilon_{ikj} = 0$. От приведеното доказателство става ясно, че за вектора на момента на импулса $\vec{L}(L_1, L_2, L_3)$ скобката на Поасон от кои да е две негови компоненти се изразява чрез третата му компонента посредством съотношението (21), в което $i, j, k = 1,2,3$.

✸ **Задача 9.2 (**Стр. 46/Зад. 267[а,б,в]**)**

✸ **а) Да се намери скобката на Поасон** $\{\vec{A}.\vec{p},\, \vec{B}.\vec{r})\} = ?$

Решение: По определение за скобка на Поасон

(1) $$\{\vec{A}.\vec{p},\, \vec{B}.\vec{r}\} = \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial(\vec{A}.\vec{p})}{\partial p_k} \frac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial x_k} - \frac{\partial(\vec{A}.\vec{p})}{\partial x_k} \frac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial p_k} \right).$$

Нека предварително определим производните, участващи в (1):

☞ $\dfrac{\partial(\vec{A}.\vec{p})}{\partial p_k} = \dfrac{\partial(A_i.p_i)}{\partial p_k} = A_i \dfrac{\partial p_i}{\partial p_k} = A_i\,\delta_{ik} = A_k$;

☞ $\dfrac{\partial(\vec{A}.\vec{p})}{\partial x_k} = \dfrac{\partial(A_i.p_i)}{\partial x_k} = A_i \dfrac{\partial p_i}{\partial x_k} = A_i.0 = 0$;

☞ $\dfrac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial p_k} = \dfrac{\partial(B_i.x_i)}{\partial p_k} = B_i \dfrac{\partial x_i}{\partial p_k} = B_i.0 = 0$;

☞ $\dfrac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial x_k} = \dfrac{\partial(B_i.x_i)}{\partial x_k} = B_i \dfrac{\partial x_i}{\partial x_k} = B_i.\delta_{ik} = B_k$.

Заместваме тези 4 производни в (1) и получаваме

(2) $\{\vec{A}.\vec{p},\, \vec{B}.\vec{r}\} = \sum_k [(A_k).(B_k) - (0).(0)] = \sum_k A_k.B_k \equiv A_k.B_k = \vec{A}.\vec{B}$.

И така $\boxed{\{\vec{A}.\vec{p},\, \vec{B}.\vec{r}\} = \vec{A}.\vec{B}}$.

✸ **б) Да се намери скобката на Поасон** $\{\vec{A}.\vec{L},\, \vec{B}.\vec{r}\} = ?$

Решение: По определение за скобка на Поасон

(3) $\{\vec{A}.\vec{L},\, \vec{B}.\vec{r}\} = \sum_{k=1}^{3}\left(\dfrac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial p_k}\dfrac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial x_k} - \dfrac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial x_k}\dfrac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial p_k} \right)$.

Нека определим производните, участващи в (3), отчитайки, че щом $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, то $L_i = -\varepsilon_{\min} x_m p_n$, и следователно

$\vec{A}.\vec{L} = A_i.L_i = A_i.(-\varepsilon_{\min} x_m p_n) = -\varepsilon_{\min} A_i\, x_m p_n$:

☞ $\dfrac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial p_k} = -\varepsilon_{\min} A_i \dfrac{\partial\, x_m p_n}{\partial p_k} = -\varepsilon_{\min} A_i (\dfrac{\partial\, x_m}{\partial p_k} p_n + x_m \dfrac{\partial\, p_n}{\partial p_k}) = -\varepsilon_{\min} A_i (0.p_n + x_m \delta_{kn}) =$

$= -\varepsilon_{\min} A_i x_m \delta_{kn} = -\varepsilon_{mik} A_i x_m = -\varepsilon_{mik} A_i x_m = \varepsilon_{imk} A_i x_m = -\varepsilon_{ikm} A_i x_m = (\vec{A}\times\vec{r})_k$;

☞ $\dfrac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial x_k} = -\varepsilon_{\min} A_i \dfrac{\partial\, x_m p_n}{\partial x_k} = -\varepsilon_{\min} A_i (\dfrac{\partial\, x_m}{\partial x_k} p_n + x_m \dfrac{\partial\, p_n}{\partial x_k}) = -\varepsilon_{\min} A_i (\delta_{km}.p_n + x_m.0) =$

$= -\varepsilon_{\min} A_i \delta_{km}.p_n = -\varepsilon_{kin} A_i.p_n = \varepsilon_{ikn} A_i.p_n \equiv -(-\varepsilon_{ikn} A_i.p_n) = -(\vec{A}\times\vec{p})_k = (\vec{p}\times\vec{A})_k$.

Другите две производни остават същите както в подусловие (а), и те са:

☞ $\dfrac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial p_k} = \dfrac{\partial(B_i.x_i)}{\partial p_k} = B_i \dfrac{\partial x_i}{\partial p_k} = B_i.0 = 0$;

☞ $\dfrac{\partial(\vec{B}.\vec{r})}{\partial x_k} = \dfrac{\partial(B_i.x_i)}{\partial x_k} = B_i \dfrac{\partial x_i}{\partial x_k} = B_i.\delta_{ik} = B_k$.

Заместваме тези 4 производни в (3) и получаваме

(4) $\{\vec{A}.\vec{L},\, \vec{B}.\vec{r}\} = \sum_k [(\vec{A}\times\vec{r})_k.B_k - (\vec{p}\times\vec{A})_k.0] = \sum_k (\vec{A}\times\vec{r})_k.B_k \equiv (\vec{A}\times\vec{r})_k.B_k =$

$= (\vec{A}\times\vec{r}).\vec{B} = (\vec{A}.\,\vec{r}.\vec{B})$,

където с $(\vec{A}.\,\vec{r}.\vec{B})$ е обозначено смесеното произведение на трите вектора. От свойството на смесените произведения следва, че пермутация на кои да е два компонента в смесеното произведение променя знака му, откъдето заключаваме, че

(5) $\{\vec{A}.\vec{L},\, \vec{B}.\vec{r}\} = (\vec{A}.\,\vec{r}.\vec{B}) = -(\vec{A}.\vec{B}.\vec{r})$.

✸ **в) Да се намери скобката на Поасон** $\{\vec{A}.\vec{L},\, \vec{B}.\vec{L}\} = ?$

Решение: По определение за скобка на Поасон

(6) $\quad \{\vec{A}.\vec{L},\, \vec{B}.\vec{L}\} = \sum_{k=1}^{3}\left(\dfrac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial p_k}\dfrac{\partial(\vec{B}.\vec{L})}{\partial x_k} - \dfrac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial x_k}\dfrac{\partial(\vec{B}.\vec{L})}{\partial p_k} \right).$

В подусловие (б) от тази задача вече определихме производните:

☞ $\dfrac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial p_k} = (\vec{A}\times\vec{r})_k$, и

☞ $\dfrac{\partial(\vec{A}.\vec{L})}{\partial x_k} = (\vec{p}\times\vec{A})_k$.

Тогава по напълно аналогичен начин

☞ $\dfrac{\partial(\vec{B}.\vec{L})}{\partial p_k} = (\vec{B}\times\vec{r})_k$, и

☞ $\dfrac{\partial(\vec{B}.\vec{L})}{\partial x_k} = (\vec{p}\times\vec{B})_k$.

Съгласно (6)

$$\{\vec{A}.\vec{L},\, \vec{B}.\vec{L}\} = \sum_k [(\vec{A}\times\vec{r})_k.(\vec{p}\times\vec{B})_k - (\vec{p}\times\vec{A})_k(\vec{B}\times\vec{r})_k] \equiv$$

$\equiv (\vec{A}\times\vec{r})_k.(\vec{p}\times\vec{B})_k - (\vec{p}\times\vec{A})_k(\vec{B}\times\vec{r})_k$, или

(7) $\quad \{\vec{A}.\vec{L},\, \vec{B}.\vec{L}\} = (\vec{A}\times\vec{r}).(\vec{p}\times\vec{B}) - (\vec{p}\times\vec{A})(\vec{B}\times\vec{r})$

За представяне на получения резултат в по-компактна и обозрима форма може да се приложи следната формула за смесено произведение на 4 вектора

(8) $\quad (\vec{M}\times\vec{N}).(\vec{P}\times\vec{Q}) = (\vec{M}.\vec{P})(\vec{N}.\vec{Q}) - (\vec{M}.\vec{Q})(\vec{N}.\vec{P})$.

Прилагаме (8) спрямо двете смесени произведения на вектори в (7):

$$\{\vec{A}.\vec{L},\, \vec{B}.\vec{L}\} = [(\vec{A}.\vec{p}).(\vec{r}.\vec{B}) - (\vec{A}.\vec{B})(\vec{r}.\vec{p})] - [(\vec{p}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{r}) - (\vec{p}.\vec{r})(\vec{A}.\vec{B})] =$$

$$= (\vec{A}.\vec{p})(\vec{r}.\vec{B}) - (\vec{A}.\vec{B})(\vec{r}.\vec{p}) - (\vec{p}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{r}) + (\vec{A}.\vec{B})(\vec{p}.\vec{r}) = (\vec{A}.\vec{p})(\vec{r}.\vec{B}) - (\vec{p}.\vec{B})(\vec{A}.\vec{r}) =$$

$$= -[(\vec{A}.\vec{r})(\vec{B}.\vec{p}) - (\vec{A}.\vec{p})(\vec{B}.\vec{r})].$$

Ако спрямо последния запис приложим формула (8), но в „обратна посока”, ще получим

(9) $\quad \{\vec{A}.\vec{L},\, \vec{B}.\vec{L}\} = -[(\vec{A}.\vec{r})(\vec{B}.\vec{p}) - (\vec{A}.\vec{p})(\vec{B}.\vec{r})] = -(\vec{A}\times\vec{B}).(\vec{r}\times\vec{p})$.

И понеже $(\vec{r}\times\vec{p}) = \vec{L}$, то последния резултат окончателно добива вида

(10) $\quad \{\vec{A}.\vec{L},\, \vec{B}.\vec{L}\} = -(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{L}$, което е търсената стойност на скобката.

✸ **Задача 9.3 (**Стр. 47/Зад. 268[А,Б,В] **)**

✸ **а)** Да се пресметне скобката на Поасон: $\{|\vec{L}|, \vec{r}.\vec{p}\} = ?$

Решение: по определение $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$, т.е.

(1) $\quad L_i = -\varepsilon_{\min} x_m p_n$.

Освен това

(2) $\quad |\vec{L}| = (\vec{L}.\vec{L})^{1/2} = (L_i.L_i)^{1/2}$.

Следователно

$$(3)\qquad \frac{\partial\left|\vec{L}\right|}{\partial p_k}=\frac{\partial}{\partial p_k}(L_i.L_i)^{1/2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(L_i.L_i)^{1/2}}.2.L_i.\frac{\partial L_i}{\partial p_k}=\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}L_i.\underbrace{(-\varepsilon_{\min}x_m\frac{\partial p_n}{\partial p_k})}_{om\ (1)}=$$

$$=-\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}\varepsilon_{\min}L_i x_m\delta_{nk}=-\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}\varepsilon_{mik}L_i x_m=-\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}(-\varepsilon_{mki}x_m L_i)=-\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}(\vec{r}\times\vec{L})_k\,.$$

$$(4)\qquad \frac{\partial\left|\vec{L}\right|}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}(L_i.L_i)^{1/2}=\frac{1}{2}\frac{1}{(L_i.L_i)^{1/2}}.2.L_i.\frac{\partial L_i}{\partial x_k}=\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}L_i.\underbrace{(-\varepsilon_{\min}p_n\frac{\partial x_m}{\partial p_k})}_{om\ (1)}=$$

$$=-\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}\varepsilon_{\min}L_i p_n\delta_{mk}=-\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}\varepsilon_{kin}L_i p_n=-\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}(-\varepsilon_{ikn}L_i p_n)=-\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}(\vec{L}\times\vec{p})_k=\frac{(\vec{p}\times\vec{L})_k}{\left|\vec{L}\right|}\,.$$

Аналогично определяме

$$(5)\qquad \frac{\partial(\vec{r}.\vec{p})}{\partial p_k}=\frac{\partial(x_i p_i)}{\partial p_k}=\frac{\partial x_i}{\partial p_k}p_i+x_i\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\cong x_i\frac{\partial p_i}{\partial p_k}=x_i\delta_{ik}=x_k\,.$$

$$(6)\qquad \frac{\partial(\vec{r}.\vec{p})}{\partial x_k}=\frac{\partial(x_i p_i)}{\partial x_k}=\frac{\partial x_i}{\partial x_k}p_i+x_i\frac{\partial p_i}{\partial x_k}\cong\frac{\partial x_i}{\partial x_k}p_i=p_i\delta_{ik}=p_k\,.$$

След като необходимите производни са вече намерени, образуваме самата скобка на Поасон

$$(7)\qquad \{\left|\vec{L}\right|,\vec{r}.\vec{p}\}=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\left|\vec{L}\right|}{\partial p_k}\frac{\partial(\vec{r}.\vec{p})}{\partial q_k}-\frac{\partial\left|\vec{L}\right|}{\partial q_k}\frac{\partial(\vec{r}.\vec{p})}{\partial p_k}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\left(\left[-\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}(\vec{r}\times\vec{L})_k\right][p_k]-\left[\frac{(\vec{p}\times\vec{L})_k}{\left|\vec{L}\right|}\right][x_k]\right)=$$

$$=-\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}\sum_{k=1}^{3}\{(\vec{r}\times\vec{L}).\vec{p}+(\vec{p}\times\vec{L}).\vec{r}\}=-\frac{1}{\left|\vec{L}\right|}\sum_{k=1}^{3}\{(\vec{r}.\vec{L}.\vec{p})+(\vec{p}.\vec{L}.\vec{r})\}\equiv 0\,,$$

понеже смесените произведения, участващи в горната сума, са свързани помежду си със съотношението $(\vec{r}.\vec{L}.\vec{p})=-(\vec{r}.\vec{p}.\vec{L})=(\vec{p}.\vec{r}.\vec{L})=-(\vec{p}.\vec{L}.\vec{r})$, следователно $(\vec{r}.\vec{L}.\vec{p})+(\vec{p}.\vec{L}.\vec{r})=0$. С това доказахме, че търсената скобка на Поасон е равна на нула.

✸ **б) Да се пресметне скобката на Поасон:** $\{\vec{p},r^n\}=?$

Решение: нека означим с $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ и $\vec{n}_3$ единичните вектори на трите оси на декартовата КС. Тогава $\vec{p}=\vec{p}(p_1,p_2,p_3)$ и следователно

$$(1)\qquad \vec{p}=p_1\vec{n}_1+p_2\vec{n}_2+p_3\vec{n}_3=p_i\vec{n}_i\,.$$

Следователно

$$(2)\qquad \frac{\partial\vec{p}}{\partial p_k}=\frac{\partial\vec{p}}{\partial p_k}(p_i\vec{n}_i)=\frac{\partial p_i}{\partial p_k}\vec{n}_i=\delta_{ik}\vec{n}_i=\vec{n}_k\,.$$

Ясно е без какъвто и да е коментар, че

$$(3)\qquad \frac{\partial\vec{p}}{\partial x_k}=0\,.$$

По определение $r=(\vec{r}.\vec{r})^{1/2}=(x_i x_i)^{1/2}$, следователно

(4) $$\frac{\partial r^n}{\partial x_k}=n.r^{n-1}\frac{\partial r}{\partial x_k}=n.r^{n-1}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_i)^{1/2}=n.r^{n-1}\frac{1}{2}(x_i x_i)^{-1/2}2x_i\frac{\partial x_i}{\partial x_k}=$$

$$=n.r^{n-1}\frac{1}{r}x_i\delta_{ik}=n.r^{n-2}x_k\,.$$

И тук елементарно се съобразява, че

(5) $$\frac{\partial r^n}{\partial p_k}=0\,.$$

Тогава търсената скобка на Поасон ще бъде

(6) $$\{\vec{p},r^n\}=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial\vec{p}}{\partial p_k}\frac{\partial r^n}{\partial q_k}-\frac{\partial\vec{p}}{\partial q_k}\frac{\partial r^n}{\partial p_k}\right)=\sum_{k=1}^{3}\left(\vec{n}_k(n.r^{n-2}x_k)-0\right)=$$

$$=n.r^{n-2}\underbrace{\sum_{k=1}^{3}x_k\vec{n}_k}_{\vec{r}}=n.r^{n-2}\vec{r}\,.$$

✸ **в) Да се пресметне скобката на Поасон:** $\{|\vec{p}|,(\vec{A}.\vec{r})^2\}=?$

Решение:

(1) $$\frac{\partial|\vec{p}|}{\partial p_k}=\frac{\partial}{\partial p_k}(p_i p_i)^{1/2}=\frac{1}{2}(p_i p_i)^{-1/2}2p_i\frac{\partial p_i}{\partial p_k}=\frac{p_i}{|\vec{p}|}\delta_{ik}=\frac{p_k}{|\vec{p}|}\,.$$

(2) $$\frac{\partial|\vec{p}|}{\partial x_k}=0$$

(3) $$\frac{\partial(\vec{A}.\vec{r})^2}{\partial x_k}=2(\vec{A}.\vec{r})\frac{\partial(\vec{A}.\vec{r})}{\partial x_k}=2(\vec{A}.\vec{r})\frac{\partial(A_i x_i)}{\partial x_k}=2(\vec{A}.\vec{r})A_i\frac{\partial x_i}{\partial x_k}=2(\vec{A}.\vec{r})A_i\,\delta_{ik}=$$

$$=2(\vec{A}.\vec{r})A_k\,.$$

(4) $$\frac{\partial(\vec{A}.\vec{r})^2}{\partial p_k}=2(\vec{A}.\vec{r})\frac{\partial(\vec{A}.\vec{r})}{\partial p_k}=2(\vec{A}.\vec{r})\frac{\partial(A_i x_i)}{\partial p_k}=2(\vec{A}.\vec{r})A_i\frac{\partial x_i}{\partial p_k}=0\,.$$

Тогава търсената скобка на Поасон ще бъде

(5) $$\{|\vec{p}|,(\vec{A}.\vec{r})^2\}=\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial|\vec{p}|}{\partial p_k}\frac{\partial(\vec{A}.\vec{r})^2}{\partial q_k}-\frac{\partial|\vec{p}|}{\partial q_k}\frac{\partial(\vec{A}.\vec{r})^2}{\partial p_k}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{3}\left(\left(\frac{p_k}{|\vec{p}|}\right)(2(\vec{A}.\vec{r})A_k)-0.0\right)=\frac{2(\vec{A}.\vec{r})}{|\vec{p}|}\underbrace{\sum_{k=1}^{3}p_k A_k}_{\vec{A}.\vec{p}}=\frac{2(\vec{A}.\vec{r})(\vec{A}.\vec{p})}{|\vec{p}|}\,.$$

✸ **Задача 9.4**

Чрез пресмятане на съответната скобка на Поасон да се докаже, че при движението на една материална точка в централно-симетрично поле проекцията L_z на момента на импулса е интеграл на движение.

Решение: доказателството ще извършим, като използваме, че една функция $f(q,p)$ на обобщените координати и обобщените импулси е интеграл на движението, ако за скобката й на Поасон $[H,f]$ е изпълнено

(1) $[H, f] = 0$,

където по дефиниция

(2) $$[H, f] = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right).$$

Следователно за да докажем, че функцията $f = L_z$ е интеграл на движението, трябва да покажем, че е в сила

(3) $$\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial L_z}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial L_z}{\partial p_k}\right) = 0.$$

За целта нека най-напред определим нужните производни. В декартови координати хамилтонианът на свободна частица е

(4) $$H = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z) = \frac{1}{2m}({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2) + U(x, y, z),$$

а моментът на импулса ѝ е

(5) $$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} = (y.p_z - z.p_y)\ \vec{i} + (z.p_x - x.p_z)\ \vec{j} + (x.p_y - y.p_x)\ \vec{k},$$

откъдето следва, че

(6) $$L_z = (x.p_y - y.p_x).$$

Следва да отчетем още, че $r = |\,\vec{r}\,| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$.

За пресмятане на скобката на Поасон (3) ще бъдат необходими следните производни:

А) $\dfrac{\partial H}{\partial p_k}$ за $k = x, y, z$, които са съответно:

(7а) $\dfrac{\partial H}{\partial p_x} = \dfrac{p_x}{m}$; (7б) $\dfrac{\partial H}{\partial p_y} = \dfrac{p_y}{m}$; (7с) $\dfrac{\partial H}{\partial p_z} = \dfrac{p_z}{m}$.

Б) $\dfrac{\partial H}{\partial q_k}$ за $k = x, y, z$, които са:

(8а) $$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial U(r)}{\partial x} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r} = \frac{x}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r};$$

(8б) $$\frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{\partial U(r)}{\partial y} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\frac{2y}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r} = \frac{y}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r};$$

(8с) $$\frac{\partial H}{\partial p_z} = \frac{\partial U(r)}{\partial z} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial U(r)}{\partial r}\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{1}{2}\frac{2z}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r} = \frac{z}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}.$$

В) $\dfrac{\partial L_z}{\partial p_k}$ за $k = x, y, z$, които са:

(9а) $\dfrac{\partial L_z}{\partial p_x} = -y$; (9б) $\dfrac{\partial L_z}{\partial p_y} = x$; (9с) $\dfrac{\partial L_z}{\partial p_z} = 0$.

Г) $\dfrac{\partial L_z}{\partial q_k}$ за $k = x, y, z$, които са:

(10a) $\dfrac{\partial L_z}{\partial x} = p_y$; (10б) $\dfrac{\partial L_z}{\partial y} = -p_x$; (10c) $\dfrac{\partial L_z}{\partial z} = 0$.

Заместваме намерените производни (7а)÷(10с) в (2) и получаваме

$$(11)\quad [H, L_z] = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial L_z}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial L_z}{\partial p_k}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial p_x}\frac{\partial L_z}{\partial x} - \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial L_z}{\partial p_x}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_y}\frac{\partial L_z}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial L_z}{\partial p_y}\right) + \left(\frac{\partial H}{\partial p_z}\frac{\partial L_z}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial L_z}{\partial p_z}\right) =$$

$$= \left(\frac{p_x}{m}p_y - \frac{x}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}.(-y)\right) + \left(\frac{p_y}{m}(-p_x) - \frac{y}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}.x\right) + \left(\frac{p_z}{m}.0 - \frac{z}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}.0\right) =$$

$$= \left(\frac{p_x p_y}{m} + \frac{x.y}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}\right) + \left(-\frac{p_x p_y}{m} - \frac{x.y}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}\right) = 0, \Rightarrow L_z \text{ е интеграл на движение}$$

✸ **Задача 9.5 (**Стр. 47/Зад. 274**)**

Чрез пресмятане на съответната скобка на Поасон да се докаже, че при движението на една материална точка централно-симетрично поле проекцията L_z на момента на импулса е интеграл на движение.

Решение: Трябва да докажем, че

(1) $[H, L] = 0$,

където по дефиниция

$$(2)\quad [H, L] = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial L}{\partial p_k}\right).$$

В декартови координати хамилтонианът на свободна частица е

$$(3)\quad H = \frac{1}{2m}(p_x{}^2 + p_y{}^2 + p_z{}^2) + U(x, y, z) = \frac{p_i p_i}{2m} + U(x, y, z),$$

а моментът на импулса ѝ е

(4) $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, т.е. $L_i = -\varepsilon_{\min} x_m p_n$.

Големината L на вектора $\vec{L}$ следва да се разглежда (*третира*) като големина на модула на този вектор, т.е.

$$(5)\quad L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2} = \sqrt{L_i L_i} \equiv (L_i^2)^{\frac{1}{2}}$$

Нека определим производните на H и L, участващи в (2):

☞ $\dfrac{\partial H}{\partial p_k} = \dfrac{\partial}{\partial p_k}\left(\dfrac{p_i p_i}{2m} + U(x, y, z)\right) = \dfrac{1}{2m}\dfrac{\partial}{\partial p_k}(p_i p_i) = \dfrac{1}{2m}\left(\dfrac{\partial p_i}{\partial p_k}p_i + p_i\dfrac{\partial p_i}{\partial p_k}\right) = \dfrac{2p_i\delta_{ik}}{2m}$, т.е.

$$(6)\quad \frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{p_k}{m}.$$

☞ Производните $\dfrac{\partial H}{\partial x_k}$ бяха вече определени в предходния (по-лек) вариант на задачата, и са

$$(7)\quad \frac{\partial H}{\partial x_k} = \frac{x_k}{r}\frac{\partial U(r)}{\partial r}.$$

За получаването на (7) може да се приложи и следната диференциална техника:

$$\frac{\partial H}{\partial x_k} \equiv \frac{\partial U(r)}{\partial x_k} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i x_i)^{1/2} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{1}{2}(x_i x_i)^{-1/2}.2x_i\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}x_i\delta_{ik} =$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}x_k = \frac{x_k}{r}\frac{\partial U}{\partial r}.$$

☞ За производните на момента на импулса L получаваме:

$$\frac{\partial L}{\partial p_k} = \frac{\partial}{\partial p_k}(L_i^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(L_i^2)^{-\frac{1}{2}}2L_i\frac{\partial L_i}{\partial p_k} = \frac{L_i}{L}\left(-\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial p_k}(x_m p_n)\right) = \frac{L_i}{L}\left[-\varepsilon_{\min}\left(\frac{\partial x_m}{\partial p_k}p_n + x_m\frac{\partial p_n}{\partial p_k}\right)\right]$$

Понеже $\frac{\partial x_m}{\partial p_k} \equiv 0$, а $\frac{\partial p_n}{\partial p_k} = \delta_{kn}$, то

(8) $$\frac{\partial L}{\partial p_k} = \frac{L_i}{L}(-\varepsilon_{\min}x_m\delta_{kn}) = \frac{1}{L}(-\varepsilon_{mik}x_m L_i) = \frac{1}{L}(\varepsilon_{mki}x_m L_i) = -\frac{1}{L}(-\varepsilon_{mki}x_m L_i) = -\frac{1}{L}(\vec{r}\times\vec{L})_k.$$

☞ По аналогичен начин определяме и

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}(L_i^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(L_i^2)^{-\frac{1}{2}}2L_i\frac{\partial L_i}{\partial x_k} = \frac{L_i}{L}\left(-\varepsilon_{\min}\frac{\partial}{\partial x_k}(x_m p_n)\right) = \frac{L_i}{L}\left[-\varepsilon_{\min}\left(\frac{\partial x_m}{\partial x_k}p_n + x_m\frac{\partial p_n}{\partial x_k}\right)\right]$$

Тук отново отчитаме, че $\frac{\partial x_m}{\partial x_k} \equiv \delta_{km}$, а $\frac{\partial p_n}{\partial x_k} = 0$, следователно

(9) $$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{L_i}{L}(-\varepsilon_{\min}\delta_{km}p_n) = \frac{1}{L}(-\varepsilon_{kin}p_n L_i) = \frac{1}{L}(\varepsilon_{kni}p_n L_i) = \frac{1}{L}(-\varepsilon_{nki}p_n L_i) = \frac{1}{L}(\vec{p}\times\vec{L})_k.$$

С така намерените производни (6), (7), (8) и (9) заместваме в (2) и получаваме

$$[H,L] = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial L}{\partial x_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k}\frac{\partial L}{\partial p_k}\right) = \sum_k\left[\frac{1}{L}(\vec{p}\times\vec{L})_k\frac{p_k}{m} - \left(-\frac{1}{L}(\vec{r}\times\vec{L})_k\right).\frac{x_k}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\right] =$$

… изпускаме символа за сумиране, понеже сумирането по повтарящия се индекс „к" се подразбира ….

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{1}{m}p_k(\vec{p}\times\vec{L})_k + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}x_k(\vec{r}\times\vec{L})_k\right] = \frac{1}{L}\left[\frac{1}{m}\vec{p}.(\vec{p}\times\vec{L}) + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}\vec{r}.(\vec{r}\times\vec{L})\right] =$$

$$= \frac{1}{L}\left[\frac{1}{m}(\vec{p}.\vec{p}.\vec{L}) + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}(\vec{r}.\vec{r}.\vec{L})\right],$$

където с $(\vec{p}.\vec{p}.\vec{L})$ и $(\vec{r}.\vec{r}.\vec{L})$ са означени смесени произведения на вектори. Но от векторната алгебра е известно, че смесено произведение, в което един и същ вектор участва 2 пъти, е равно на нула, следователно $(\vec{p}.\vec{p}.\vec{L}) = 0$ и $(\vec{r}.\vec{r}.\vec{L}) = 0$, откъдето следва

(10) $[H,L] = 0$,

с което доказваме, че L е интеграл на движението.

Движението в централно-симетрично поле е случай на движение, при който по силата на ЗЗМИ траекторията на движение е равнинна крива, т.е. $\vec{r} = (x, y, 0)$. Следователно моментът на импулса е

$$(11)\quad \vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ p_x & p_y & 0 \end{vmatrix} = 0.\vec{i} + 0.\vec{j} + (x.p_y - y.p_x)\,\vec{k} \equiv L_z\,\vec{k} = \vec{L}_z\,.$$

Оказва се, че при движение в централно-симетрично поле двата интеграла на движение (L и L_z) съвпадат.

Тема 10: Канонични трансформации

Теоретичен минимум: Изборът на обобщени координати в лагранжевата механика не е ограничен от никакви изисквания – това могат да бъдат **произволни** s на брой величини, определящи еднозначно положението на системата в пространството. Уравненията на Лагранж са инвариантни относно преобразования на координатите, т.е. при преход от обобщени координати $q_i(t)$ към нови координати $Q_i(t)$ с помощта на т.нар. **точкови трансформации**

$$q_i(t) = f_i[Q_i(t),t] \qquad \text{и} \qquad L(q_i(t),\dot{q}_i(t),t) = L(Q_i(t),\dot{Q}_i(t),t)\,,$$

уравненията на Лагранж запазват своя вид в новите координати (*не менят своята аналитична форма*). Следователно уравненията на Лагранж са **инвариантни** относно точкови трансформации.

Уравненията на Хамилтон също са инвариантни относно точкови трансформации, но те са инвариантни и по отношение на **по-широк кръг** трансформации, наречени **канонични трансформации**. Уравненията на Хамилтон допускат (*формално*) възможността за по-широк клас трансформации, запазващи вида им, понеже в тях ролята на независими променливи играят два пъти повече (т.е. $2s$) величини: **обобщените координати** $q_i(t)$ и **обобщените импулси** $p_i(t)$.

<u>Определение:</u> канонични трансформации се наричат тези **трансформации** на **каноничните променливи**

$$\begin{aligned} Q_i &= Q_i[q_1,q_2,...q_s;\,p_1,p_2,...p_s,t] \\ P_i &= P_i[q_1,q_2,...q_s;\,p_1,p_2,...p_s,t] \end{aligned} \quad \text{за } i=1,2,....,s\,,$$

които свързват обобщените координати q_i, Q_i и обобщените импулси p_i, P_i, и които **запазват вида на уравненията на Хамилтон**, т.е. ако са в сила системата уравнения (*уравнения в „старите” обобщени координати*)

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{и} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{за } i=1,2,....,s\,,$$

то в сила са и системата уравнения (*уравнения в „новите” обобщени координати*)

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H^{/}}{\partial Q_i} \quad \text{и} \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H^{/}}{\partial P_i} \quad \text{за } i=1,2,....,s\,,$$

където $H^{/} = H^{/}(Q_i,P_i,t)$ е „новият” хамилтониан (*хамилтонианът на системата след извършване на преобразованието*).

Оказва се, че всяка канонична трансформация на обобщените координати и обобщените импулси се характеризира (*задава*) със своята т.нар. **производяща функция**.

Идея за въвеждане на производящи функции на канонична трансформация:

Както е известно една от дефинициите на функцията на Хамилтон е

(1) $H(p,q,t)=\sum_{i=1}^{s} p_i\,\dot{q}_i - L(q,\dot{q},t) \qquad \Big| .dt$, т.е.

$$L(q,\dot{q},t).dt=\sum_{i=1}^{s} p_i \frac{dq_i}{d\,t}.\,d\,t - H(p,q,t).dt \equiv \sum_{i=1}^{s} p_i\;dq_i - H(p,q,t).dt\,.$$

Съгласно принципа на най-малкото действие вариацията от $L(q,\dot{q},t)$

$$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t).dt\right)=0,$$

което означава, че и вариацията от равната на нея величина е нула, т.е.

(2) $$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{s} p_i\;dq_i - H(p,q,t).dt\right]\right)=0.$$

Разсъждавайки по същия начин, стигаме до заключението, че и вариацията в „новите" променливи (Q_i, P_i) се подчинява на същото съотношение, т.е.

(3) $$\delta\left(\int_{t_1}^{t_2}\left[\sum_{i=1}^{s} P_i\;dQ_i - H^{/}(P,Q,t).dt\right]\right)=0.$$

Равенствата (2) и (3) ще бъдат еквивалентни едно на друго само ако подинтегралните им функции се различават с пълен диференциал от някаква функция $F(q_i, p_i, Q_i, P_i)$ на координатите q_i, Q_i и импулсите p_i, P_i, т.е.

(4) $$\left[\sum_{i=1}^{s} p_i\;dq_i - H(p,q,t).dt\right]-\left[\sum_{i=1}^{s} P_i\;dQ_i - H^{/}(P,Q,t).dt\right]=F(q_i, p_i, Q_i, P_i),$$

или още

(5) $$\boxed{dF(q,p,Q,P,t)=\sum_{i=1}^{s} p_i\,dq_i - \sum_{i=1}^{s} P_i\,dQ_i + (H^{/}-H)\,dt}.$$

Определената по този начин функция $F(q_i, p_i, Q_i, P_i)$ се нарича **производяща функция на канонична трансформация**.

В теорията на каноничните трансформации се разглеждат следните **4 типа** възможни производящи функции на канонични трансформации:

$F_1(q,Q,t)$; $\qquad F_2(q,P,t)$; $\qquad F_3(p,Q,t)$ $\qquad$ и $\qquad F_4(p,P,t)$.

❶ **Производяща функция от първи тип** $F_1(q,Q,t)$, дефинирана със съотношението

(6) $$\boxed{dF_1(q,Q,t)=\sum_{i=1}^{s} p_i\,dq_i - \sum_{i=1}^{s} P_i\,dQ_i + (H^{/}-H)\,dt},$$

от което следва, че

$$(7)\qquad \left|\begin{aligned} & p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \\ & P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \qquad , \qquad i = 1,2,\dots,s \\ & H' = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \end{aligned}\right.$$

❷ **Производяща функция от втори тип** $F_2(q,P,t)$, за дефинирането на която към двете страни на (6) прибавяме $d\left(\sum_{i=1}^{s} P_i\, Q_i\right)$:

$$(8)\qquad dF_1(q,Q,t) + d\left(\sum_{i=1}^{s} P_i\, Q_i\right) = \sum_{i=1}^{s} p_i\, dq_i - \sum_{i=1}^{s} P_i\, dQ_i + d\left(\sum_{i=1}^{s} P_i\, Q_i\right) + (H' - H)\,dt\,,$$

откъдето следва, че ако обозначим $dF_2(q,P,t) = d\left(F_1(q,Q,t) + \sum_{i=1}^{s} P_i\, Q_i\right)$, то

$$(9)\qquad \boxed{dF_2(q,P,t) = \sum_{i=1}^{s} p_i\, dq_i + \sum_{i=1}^{s} Q_i\, dP_i + (H' - H)\,dt},$$

и следователно

$$(10)\qquad \left|\begin{aligned} & p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \\ & Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \qquad , \qquad i = 1,2,\dots,s \\ & H' = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \end{aligned}\right.$$

Очевидно: (*) $F_2(q,P,t) = F_1(q,Q,t) + \sum_{i=1}^{s} P_i\, Q_i$.

❸ **Производяща функция от трети тип** $F_3(p,Q,t)$, за дефинирането на която от двете страни на (6) **изваждаме** $d\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, q_i\right)$:

$$(11)\qquad dF_1(q,Q,t) - d\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, q_i\right) = \sum_{i=1}^{s} p_i\, dq_i - d\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, q_i\right) - \sum_{i=1}^{s} P_i\, dQ_i + (H' - H)\,dt\,,$$

откъдето следва, че ако обозначим $dF_3(p,Q,t) = d\left(F_1(q,Q,t) - \sum_{i=1}^{s} p_i\, q_i\right)$, то

$$(12)\qquad \boxed{dF_3(p,Q,t) = -\sum_{i=1}^{s} q_i\, dp_i - \sum_{i=1}^{s} P_i\, dQ_i + (H' - H)\,dt},$$

и следователно

$$(13)\quad \left| \begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \\ P_i &= -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \qquad , \qquad i = 1,2,\dots,s \\ H' &= H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

Очевидно: **(**)** $F_3(p,Q,t) = F_1(q,Q,t) - \sum_{i=1}^{s} p_i\, q_i$.

❹ **Производяща функция от четвърти тип** $F_4(p,P,t)$, за дефинирането на която от двете страни на (9) вадим $d\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, q_i\right)$:

$$(14)\quad dF_2(q,P,t) - d\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, q_i\right) = \sum_{i=1}^{s} p_i\, dq_i - d\left(\sum_{i=1}^{s} p_i\, q_i\right) + \sum_{i=1}^{s} Q_i\, dP_i + (H' - H)\, dt ,$$

откъдето следва, че ако обозначим $dF_4(p,P,t) = d\left(F_2(q,Q,t) - \sum_{i=1}^{s} p_i\, q_i\right)$, то

$$(15)\quad \boxed{dF_4(p,P,t) = -\sum_{i=1}^{s} q_i\, dp_i + \sum_{i=1}^{s} Q_i\, dP_i + (H' - H)\, dt},$$

и следователно

$$(16)\quad \left| \begin{aligned} q_i &= -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \\ Q_i &= \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \qquad , \qquad i = 1,2,\dots,s \\ H' &= H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{aligned} \right.$$

Очевидно: **(***)** $F_4(p,P,t) = F_2(q,Q,t) - \sum_{i=1}^{s} p_i\, q_i \equiv F_1(q,Q,t) + \sum_{i=1}^{s} P_i\, Q_i - \sum_{i=1}^{s} p_i\, q_i$

Ето информация за производящите функции на каноничните преобразования от четирите типа, представена в по-обозрим и удобен за осмисляне и запомняне вид:

Тип	**Канонична трансформация**	**Уравнения**	**Хамилтониан**

I $F_1(q,Q)$	$dF_1(q,Q,t)=\sum_{i=1}^{s} p_i\,dq_i-\sum_{i=1}^{s} P_i\,dQ_i+(H'-H)\,dt$	$p_i=\frac{\partial F_1}{\partial q_i}$ $P_i=-\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}$	$H'=H+\frac{\partial F_1}{\partial t}$
II $F_2(q,P)$	$F_2(q,P,t)=F_1(q,Q,t)+\sum_{i=1}^{s} P_i\,Q_i$	$p_i=\frac{\partial F_2}{\partial q_i}$ $Q_i=\frac{\partial F_2}{\partial P_i}$	$H'=H+\frac{\partial F_2}{\partial t}$
III $F_3(p,Q)$	$F_3(p,Q,t)=F_1(q,Q,t)-\sum_{i=1}^{s} p_i\,q_i$	$q_i=-\frac{\partial F_3}{\partial p_i}$ $P_i=-\frac{\partial F_3}{\partial Q_i}$	$H'=H+\frac{\partial F_3}{\partial t}$
IV $F_4(p,P)$	$F_4(p,P,t)=F_2(q,Q,t)-\sum_{i=1}^{s} p_i\,q_i\equiv F_1(q,Q,t)+\sum_{i=1}^{s} P_i\,Q_i-\sum_{i=1}^{s} p_i\,q_i$	$q_i=-\frac{\partial F_4}{\partial p_i}$ $Q_i=\frac{\partial F_4}{\partial P_i}$	$H'=H+\frac{\partial F_4}{\partial t}$
	Канонични уравнения: $\dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i}$, $\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}$ $\dot{P}_i=-\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$, $\dot{Q}_i=\frac{\partial H'}{\partial P_i}$		

✷ **Задача 10.1** (Стр. 47/Зад. 277**)**

Да се намери производящата функция $F_3(p,Q)$, задаваща същата канонична трансформация, както функцията

(1) $F_2(q,P)=q^2\exp(P)$.

Решение: Съгласно теорията за канонични трансформации от втори тип каноничните променливи p и Q, непредставени в трансформационното съотношение, могат да бъдат определени от уравненията

(2) $p=\frac{\partial F_2}{\partial q}=2q\exp(P)$, и

(3) $Q=\frac{\partial F_2}{\partial P}=q^2\exp(P)$.

Съгласно същата тази теория /*виж формула* **(**)** *от теоретичната част*/ производящата функция $F_3(p,Q)$ е

(4) $F_3(p,Q,t)=F_1(q,Q,t)-\sum_{i=1}^{s} p_i\,q_i\equiv F_1(q,Q,t)-p.q$.

Очевидно за да определим търсената функция $F_3(p,Q)$ е необходимо да знаем $F_1(q,Q,t)$. Но съгласно формула **(*)** от теоретичната част

(5) $F_2(q,P,t)=F_1(q,Q,t)+\sum_{i=1}^{s} P_i\,Q_i\equiv F_1(q,Q,t)+P.Q$,

откъдето следва, че

(6) $$F_1(q,Q,t) = F_2(q,P,t) - P.Q = q^2 \exp(P) - P.Q\,.$$

Остава да заместим $F_1(q,Q,t)$ от (6) в (4), с което представянето за търсената производяща функция $F_3(p,Q)$ добива вида

(7) $$F_3(p,Q,t) = F_1(q,Q,t) - p.q = q^2 \exp(P) - P.Q - p.q\,.$$

Понеже, както добре се вижда от (7), $F_3(p,Q,t)$ трябва да зависи само от каноничните променливи p и Q, то присъствието в (7) на q и P трябва да бъде елиминирано, т.е. те да бъдат изключени с помощта на съотношенията (2) и (3):

☞ ако разделим почленно (3) и (2), ще получим адекватно на каноничните изисквания за $F_3(p,Q,t)$ представяне за q:

(8) $$q = \frac{2Q}{p}\,.$$

☞ а ако заместим така намереното представяне (8) за q в (2), след което антилогаритмуваме, ще получим

(9) $$p = \frac{4Q}{p}\exp(P), \quad \text{т.е.} \quad \exp(P) = \frac{p^2}{4Q}, \qquad \Rightarrow \qquad (10) \quad P = \ln\left(\frac{p^2}{4Q}\right).$$

Остава да заместим q от (8) и P от (10) „навсякъде” в (7)

(11) $$F_3(p,Q,t) = \underbrace{q}_{\uparrow}{}^2 \exp(\underbrace{P}_{\uparrow}) - \underbrace{P}_{\uparrow}.Q - p.\underbrace{q}_{\uparrow} = \frac{4Q^2}{p^2}\frac{p^2}{4Q} - \ln\left(\frac{p^2}{4Q}\right).Q - p.\frac{2Q}{p} =$$

$$= Q - Q.\ln\left(\frac{p^2}{4Q}\right) - 2Q = -Q - Q.\ln\left(\frac{p^2}{4Q}\right) = -Q\left[1 + \ln\left(\frac{p^2}{4Q}\right)\right].$$

И така производящата функция $F_3(p,Q)$, задаваща същата канонична трансформация, както функцията $F_2(q,P) = q^2\exp(P)$, е

(12) $$F_3(p,Q,t) = -Q\left[1 + \ln\left(\frac{p^2}{4Q}\right)\right].$$

✸ **Задача 10.2** (Стр.48/Зад. 281**)**

Да се покаже, че трансформацията с уравнения

(1^А^) $q_1 = Q_1\cos\varphi + (P_2/m\omega)\sin\varphi$, (1^Б^) $q_2 = Q_2\cos\varphi + (P_1/m\omega)\sin\varphi$,

(2^А^) $p_1 = -m\omega Q_2\sin\varphi + P_1\cos\varphi$, (2^Б^) $p_2 = -m\omega Q_1\sin\varphi + P_2\cos\varphi$

е канонична и че не променя вида на функцията на Хамилтон

(3) $$H(\vec{q},\vec{p}) = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(q_1^2 + q_2^2)\,.$$

Решение: за да се докаже, че тези трансформации са канонични, трябва да изразим хамилтониана в новите канонични променливи Q_1, Q_2 и P_1, P_2, т.е. да намерим $H^{/}(\vec{Q},\vec{P})$ и след това да докажем (покажем), че $H^{/}(\vec{Q},\vec{P})$ има аналитичен вид, аналогичен (*по структура на записа*) на (3), а каноничните уравнения се запазват, т.е. че

(4^А^) $$\dot{P}_i = -\frac{\partial H^{/}}{\partial Q_i} \qquad \text{и} \qquad (4^Б) \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H^{/}}{\partial P_i} \quad \text{за } i = 1,2,\ldots,s$$

Нека най-напред получим каноничните уравнения в „старите” променливи q_1, q_2 и p_1, p_2, отнасящи се за хамилтониана $H(\vec{q}, \vec{p})$ от (3)

(5^А) $\dot{p}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_1} = -m\omega^2 q_1$, (5^Б) $\dot{p}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial q_2} = -m\omega^2 q_2$,

(6^А) $\dot{q}_1 = \dfrac{\partial H}{\partial p_1} = \dfrac{p_1}{m}$, (6^Б) $\dot{q}_2 = \dfrac{\partial H}{\partial p_2} = \dfrac{p_2}{m}$.

Тъй като функцията на Хамилтон дава (*изразява*) пълната механична енергия на разглежданата система, а тази енергия в ситуации, при които е приложим ЗЗЕ (*а има индикации, че в дадения случай това е точно така, понеже хамилтонианът (3) не зависи явно от времето*), по никой начин не може (*и не бива*) да зависи от трансформацията на каноничните променливи, то очевидно следва да бъде изпълнено равенството

(7) $H(\vec{q}, \vec{p}) = H^{/}(\vec{Q}, \vec{P})$,

независимо от това какъв е аналитичният вид (*еднакъв или различен*) на всеки един от хамилтонианите. След тази забележка можем да уточним, че хамилтонианът в новите канонични $H^{/}(\vec{Q}, \vec{P})$ променливи може да бъде определен, ако се „тръгне” от хамилтониана (3) в старите канонични променливи, взети от трансформационните закони (1^А), (1^Б), (2^А) и (2^Б), т.е.:

(8) $$H^{/}(\vec{Q}, \vec{P}) = \frac{p_1^2(\vec{P}, \vec{Q}) + p_2^2(\vec{P}, \vec{Q})}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}[q_1^2(\vec{P}, \vec{Q}) + q_2^2(\vec{P}, \vec{Q})] =$$

$$= \frac{\{-m\omega Q_2 \sin\varphi + P_1 \cos\varphi\}^2 + \{-m\omega Q_1 \sin\varphi + P_2 \cos\varphi\}^2}{2m} +$$

$$+ \frac{m\omega^2}{2}[\{Q_1 \cos\varphi + (P_2 / m\omega)\sin\varphi\}^2 + \{Q_2 \cos\varphi + (P_1 / m\omega)\sin\varphi\}^2] =$$

$$= \frac{m^2\omega^2 Q_2^{\,2} \sin^2\varphi - m\omega P_1 Q_2 \sin 2\varphi + P_1^{\,2} \cos^2\varphi + m^2\omega^2 Q_1^{\,2} \sin^2\varphi - m\omega P_2 Q_1 \sin 2\varphi + P_2^{\,2} \cos^2\varphi}{2m} +$$

$$+ \frac{m\omega^2}{2}[Q_1^{\,2} \cos^2\varphi + \frac{P_2 Q_1}{m\omega}\sin 2\varphi + \frac{P_2^{\,2}}{m^2\omega^2}\sin^2\varphi + Q_2^{\,2} \cos^2\varphi + \frac{P_1 Q_2}{m\omega}\sin 2\varphi + \frac{P_1^{\,2}}{m^2\omega^2}\sin^2\varphi] =$$

$$= \frac{m\omega^2 Q_2^{\,2} \sin^2\varphi}{2} - \frac{\omega P_1 Q_2 \sin 2\varphi}{2} + \frac{P_1^{\,2} \cos^2\varphi}{2m} + \frac{m\omega^2 Q_1^{\,2} \sin^2\varphi}{2} - \frac{\omega P_2 Q_1 \sin 2\varphi}{2} + \frac{P_2^{\,2} \cos^2\varphi}{2m} +$$

$$+ \frac{m\omega^2 Q_1^{\,2} \cos^2\varphi}{2} + \frac{\omega P_2 Q_1 \sin 2\varphi}{2} + \frac{P_2^{\,2} \sin^2\varphi}{2m} + \frac{m\omega^2 Q_2^{\,2} \cos^2\varphi}{2} + \frac{\omega P_1 Q_2 \sin 2\varphi}{2} + \frac{P_1^{\,2} \sin^2\varphi}{2m} =$$

…… *следват съкращения* ……….

$$= \frac{P_1^{\,2} + P_2^{\,2}}{2m}\cos^2\varphi + \frac{m\omega^2}{2}[Q_1^{\,2} + Q_2^{\,2}]\sin^2\varphi + \frac{P_1^{\,2} + P_2^{\,2}}{2m}\sin^2\varphi + \frac{m\omega^2}{2}[Q_1^{\,2} + Q_2^{\,2}]\cos^2\varphi =$$

$$= \frac{P_1^{\,2} + P_2^{\,2}}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}[Q_1^{\,2} + Q_2^{\,2}].$$

И така, получихме за хамилтониана представянето в „новите” канонични променливи

(9) $$H^{/}(\vec{Q}, \vec{P}) = \frac{P_1^{\,2} + P_2^{\,2}}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}[Q_1^{\,2} + Q_2^{\,2}].$$

От сравняването на (9) и (3) се вижда тяхното принципно аналитично сходство, к.т.д. Може да се покаже, че подобно сходство съществува и между каноничните уравнения. Действително – сравни следващите равенства, получени след диференциране на (9), с уравненията $(5^А)$, $(5^Б)$, $(6^А)$ и $(6^Б)$:

$$(10^А)\quad \dot{P}_1 = -\frac{\partial H'}{\partial Q_1} = -m\omega^2 Q_1, \qquad (10^Б)\quad \dot{P}_2 = -\frac{\partial H'}{\partial Q_2} = -m\omega^2 Q_2,$$

$$(11^А)\quad \dot{Q}_1 = \frac{\partial H'}{\partial P_1} = \frac{P_1}{m}, \qquad (11^Б)\quad \dot{Q}_2 = \frac{\partial H'}{\partial P_2} = \frac{P_2}{m}, \quad \text{к.т.д.}$$

Извод: очевидно с равенствата $(1^А)$, $(1^Б)$, $(2^А)$ и $(2^Б)$ е зададена канонична трансформация.

✸ **Задача 10.3** (Стр. 48/Зад. $282^{А,Б}$**)**

Да се намерят каноничните трансформации, зададени с производящите функции:

а) $$F_1(q,Q) = \sum_{k=1}^{s} q_k Q_k;$$

б) $$F_2(q,P) = -\sum_{k=1}^{s} q_k P_k.$$

Решение:

а) съгласно теорията за производяща функция от първи тип (*виж формула (7) от теоретичната част*)

$$(1)\qquad \left| \begin{aligned} p_k &= \frac{\partial F_1}{\partial q_k} = Q_k \\ P_k &= -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = -q_k \end{aligned} \right. .$$

Следователно търсеното канонично преобразование се задава със съотношенията $p_k = Q_k$ и $P_k = -q_k$.

б) съгласно теорията за производяща функция от втори тип (*виж формула (10) от теоретичната част*)

$$(2)\qquad \left| \begin{aligned} p_k &= \frac{\partial F_2}{\partial q_k} = -P_k \\ Q_k &= \frac{\partial F_2}{\partial P_k} = -q_k \end{aligned} \right. .$$

Следователно търсеното канонично преобразование се задава със съотношенията $p_k = -P_k$ и $Q_k = -q_k$.

🕮

Тема 11: Уравнение на Хамилтон-Якоби

Теоретичен минимум: ако в уравнението

$$(1)\qquad \frac{\partial S}{\partial t} + H(p_i, q_i, t) = 0,$$

обобщените импулси p_i заместим с частните производни от действието, т.е. $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$, то се получава следното диференциално уравнение за действието:

(2) $$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, ..q_s; \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}, t\right) = 0 .$$

Това **частно** диференциално уравнение от първи ред се нарича **уравнение на Хамилтон-Якоби**.

✸ Задача 11.1

Да се покаже, че уравнението на Хамилтон-Якоби за частица с маса m, движеща се в поле с потенциал $U(\vec{r})$, е нелинейно частно ДУ от първи ред.

Решение: Както е известно хамилтонианът (*в декартови координати*) за такава частица, е

(1) $$H(p,q) = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(\vec{r}),$$

Отчитайки, че $p_x = \dfrac{\partial S}{\partial x}$, $p_y = \dfrac{\partial S}{\partial y}$ и $p_z = \dfrac{\partial S}{\partial z}$, от (1) и (2) от уводната част получаваме

(2) $$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + U(\vec{r}) = 0,$$

откъдето следва, че уравнението на Хамилтон-Якоби е действително **нелинейно частно** диференциално уравнение от **първи** ред относно действието S.

✸ Задача 11.2

Да се получи и реши уравнението на Хамилтон-Якоби за свободна частица в отсъствието на външна сила.

Решение: в декартови координати функцията на Хамилтон за такава частица е

(1) $$H = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2).$$

Както е известно обобщените импулси се представят чрез производните на действието S:

(2) $$p_1 = \frac{\partial S}{\partial x_1}, \qquad p_2 = \frac{\partial S}{\partial x_2} \qquad \text{и} \qquad p_3 = \frac{\partial S}{\partial x_3}.$$

С отчитането на (1) и (2) уравнението на Хамилтон-Якоби добива вида

(3) $$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] = 0$$

Системата е консервативна ($H = H_0 = E$), а трите координати са циклични. Затова полагаме

(4) $$S = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 - E.t + C,$$

където $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ и C са константи, а зависимостта на S от времето се свежда до адитивен линеен член по времето $E.t$. Тези константи са зависими. Наистина, заместването на S в уравнението на Хамилтон-Якоби (3) дава

$$(5)\qquad \frac{1}{2m}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)-E=0,$$

откъдето можем да изразим E и да заместим в (4)

$$(6)\qquad S=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\alpha_3 x_3-\frac{1}{2m}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2).t+C.$$

Интегралите на движението намираме като решения на системата уравнения

$$(7)\qquad \beta_1=\frac{\partial S}{d\alpha_1}=x_1-\frac{\alpha_1}{m}t;\qquad \beta_2=\frac{\partial S}{d\alpha_2}=x_2-\frac{\alpha_2}{m}t,\qquad \beta_3=\frac{\partial S}{d\alpha_3}=x_3-\frac{\alpha_3}{m}t,$$

откъдето

$$(8)\qquad x_1=\beta_1+\frac{\alpha_1}{m}t;\qquad x_2=\beta_2+\frac{\alpha_2}{m}t,\qquad x_3=\beta_3+\frac{\alpha_3}{m}t.$$

Импулсите намираме от системата уравнения

$$(9)\qquad p_1=\frac{\partial S}{\partial x_1}=\alpha_1,\qquad p_2=\frac{\partial S}{\partial x_2}=\alpha_2\qquad \text{и}\qquad p_3=\frac{\partial S}{\partial x_3}=\alpha_3.$$

✸ **Задача 11.3** Да се намери уравнението на Хамилтон-Якоби за материална точка, движеща се в еднородно гравитационно поле. Да се намери пълният интеграл на това уравнение, а също така законът за движение и уравнението на траекторията.

Решение: нека ориентираме оста Oz вертикално нагоре. Тогава в декартови координати функцията на Хамилтон ще бъде

$$(1)\qquad H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+mgz,$$

а уравнението на Хамилтон-Якоби ще бъде

$$(2)\qquad \frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]+mgz=0$$

Всички променливи в това уравнение се разделят, т.е. неговият пълен интеграл, изразяващ действието S, има вида

$$(3)\qquad S=\alpha_1 x+\alpha_2 y+W(z)-E.t,$$

където функцията $W(z)$ удовлетворява следното диференциално уравнение, получено от заместването на (3) в (2)

$$(4)\qquad -E+\frac{1}{2m}\left[\alpha_1^2+\alpha_2^2+\left(\frac{dW}{dz}\right)^2\right]+mgz=0,$$

или още

$$(5)\qquad \frac{dW}{dz}=\sqrt{2m[E-mgz]-\alpha_1^2-\alpha_2^2}.$$

Последното уравнение се интегрира елементарно

$$(6)\qquad W(z)=\int\sqrt{2m[E-mgz]-\alpha_1^2-\alpha_2^2}\,dz=$$

$$=-\frac{1}{2m^2 g}\int\{2m[E-mgz]-\alpha_1^2-\alpha_2^2\}^{1/2}\,d\{2m[E-mgz]-\alpha_1^2-\alpha_2^2\}=$$

$$= -\frac{1}{2m^2 g}\frac{1}{1/2+1}\{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{3/2} =$$

$$= -\frac{1}{3m^2 g}\{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{3/2}.$$

След заместване на $W(z)$ в (3) получаваме

(7) $$S = \alpha_1 x + \alpha_2 y - \frac{1}{3m^2 g}\{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{3/2} - E.t \equiv S(\alpha_1,\alpha_2,E).$$

Оттук на основата на теоремата на Якоби получаваме както следва интегралите на движението, явяващи се решения на системата уравнения

(8А) $$\beta_1 = \frac{\partial S}{d\alpha_1} = x - \frac{1}{3m^2 g}(-2\alpha_1)\frac{3}{2}\{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{1/2} =$$

$$= x + \frac{\alpha_1}{3m^2 g}\{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{1/2}.$$

(8Б) $$\beta_2 = \frac{\partial S}{d\alpha_2} = y - \frac{1}{3m^2 g}(-2\alpha_2)\frac{3}{2}\{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{1/2} =$$

$$= y + \frac{\alpha_2}{3m^2 g}\{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{1/2}.$$

(8В) $$\beta_3 = \frac{\partial S}{dE} = -t - \frac{1}{3m^2 g}(2m)\frac{3}{2}\{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{1/2} =$$

$$= -t - \frac{1}{mg}\{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{1/2}.$$

Първите две уравнения показват, че траекторията на частицата е парабола, а третото уравнение се явява законът за движение

(9) $$\beta_3 + t = -\frac{1}{mg}\{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{1/2}.$$

Нека определим и компонентите на импулса на частицата

(10А) $$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \alpha_1,$$

(10Б) $$p_y = \frac{\partial S}{\partial y} = \alpha_2,$$

и очевидно тези две проекции на импулса се запазват постоянни;

(10В) $$p_z = \frac{\partial S}{\partial z} = -\frac{1}{3m^2 g}(-2m^2 g)\frac{3}{2}\{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{1/2} =$$

$$= \{2m[E-mgz]-\alpha_1^{\,2}-\alpha_2^{\,2}\}^{1/2} \equiv f(z).$$

⌘⌘⌘⌘⌘

П Р И Л О Ж Е Н И Я

Приложение 1: формули на Бине

(П.1) $$M^2\left\{\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\frac{1}{r^2}\right\}=2m(E-U(r))\,;$$

(П.2) $$|\vec{F}_r|=-\frac{M^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right].$$

А) Доказателство на (П.1):

От закона за запазване на момента на импулса $M=mr^2\dot{\varphi}$ следва, че

(**П**.3) $$\frac{d\varphi}{dt}=\frac{M}{mr^2}\text{, откъдето}$$

(**П**.4) $$dt=\frac{mr^2}{M}d\varphi\,.$$

Нека образуваме квадрата на скоростта в полярни координати

(П.5) $$v^2=\dot{r}^2+r^2\,.\,\dot{\varphi}^2=\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2.$$

Заместваме dt от (П.4) в (П.5) и получаваме

$$v^2=\left(\frac{dr}{d\varphi}.\frac{M}{mr^2}\right)^2+r^2\left(\frac{d\varphi}{d\varphi}.\frac{M}{mr^2}\right)^2=\frac{M^2}{m^2}\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]\text{, т.е.}$$

(П.6) $$\boxed{v^2=\frac{M^2}{m^2}\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]}.$$

Ще използваме, че $\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$, т.е.

(П.7) $$\frac{dr}{d\varphi}=-r^2\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Заместваме това представяне на производната в (П.6), и получаваме

(П.8) $$v^2=\frac{M^2}{m^2}\left[\frac{1}{r^4}\left(-r^2\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]=\frac{M^2}{m^2}\left[\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2+\frac{1}{r^2}\right].$$

Можем да запишем (П.8) още във вида

(П.9) $$m^2v^2=M^2\left[\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2+\frac{1}{r^2}\right],$$

След което да отчетем, че

(П.10) $$m^2v^2=2m\left(\frac{mv^2}{2}\right)=2mT=2m(E-U)\,.$$

От сравняването на десните страни на (П.9) и (П.10) получаваме точно (П.1)

$$\boxed{M^2\left\{\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\frac{1}{r^2}\right\}=2m(E-U(r))}\text{, к.т.д.}$$

Б) Доказателство на (П.2):

За да изведем втората (основна) формула на Бине, изхождаме от ЗЗЕ

$$d(T+U)=0, \qquad \text{т.е.} \qquad -dU=dT\equiv d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$$

Но $\quad -dU=\left(-\frac{dU}{dr}\right).dr=F_r.dr,\quad$ следователно

(П.11) $\qquad F_r.dr=d\left(\frac{mv^2}{2}\right).$

Разделяме двете страни на (Д.11) с $d\varphi$ (*т.е. формално диференцираме по* φ)

$$F_r.\frac{dr}{d\varphi}=\frac{m}{2}\frac{d}{d\varphi}(\underbrace{v^2}_{от(П.8)})=\frac{m}{2}\frac{d}{d\varphi}\left\{\frac{M^2}{m^2}\left[\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{M^2}{2m}\frac{d}{d\varphi}\left[\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right)^2+\frac{1}{r^2}\right]=\frac{M^2}{2m}\left\{\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]^2+\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{1}{r^2}\right]\right\}=$$

$$=\frac{M^2}{2m}\left[2\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right)+\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]=\frac{M^2}{2m}\left[2\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right)+2.\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\right]=$$

$$=\frac{M^2}{m}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=\frac{M^2}{m}\left(\frac{-1}{r^2}\right)\frac{dr}{d\varphi}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]=-\frac{M^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]\frac{dr}{d\varphi}.$$

И така доказахме, че

(П.12) $\qquad F_r.\frac{dr}{d\varphi}=-\frac{M^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]\frac{dr}{d\varphi}.$

След съкращаване на общия множител $\frac{dr}{d\varphi}$ получаваме точно втората формула на Бине:

$$\boxed{\left|\vec{F}_r\right|\equiv F_r=-\frac{M^2}{mr^2}\left[\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right]}, \text{ к.т.д.}$$

Нека в заключение напомним, че

(П.13) $\qquad \vec{F}\equiv\vec{F}_r=-grad\,U(r)=-\frac{dU}{dr}.grad\;r=-\frac{dU}{dr}.\frac{\vec{r}}{r}\equiv-\frac{dU}{dr}.\vec{e}_r,$

откъдето следва, че

(П.14) $\qquad F_r=-\frac{dU}{dr}.$

Приложение 2: Извод на уравненията на Лагранж

Ще считаме, че в моменти време t_1 и t_2 системата се намира в две точно определени състояния с обобщени координати $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ съответно. Тогава между тези две състояния системата се движи по такъв начин, че интегралът (*действието*)

(1) $\qquad S=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)\,dt$

има минимална стойност за някаква функция $q=q(t)$, или неговата вариация

(2) $\qquad \delta S=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot{q},t)\,dt=0$

е равна на нула. Нека

(3) $q = q(t)$

е тази функция, за която действието S има минимум. Нека заменим функцията $q = q(t)$, минимизираща действието, със функцията

(4) $q(t) \to q(t) + \delta q(t)$,

където $\delta q(t)$ - вариация на $q(t)$ в интервала (t_1, t_2). Тъй като при $t = t_1$ и $t = t_2$ всички функции трябва да приемат едни и същи стойности $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, то можем да заключим, че в краищата на интервала t_1, t_2 вариациите $\delta q(t)$ трябва да бъдат равни на нула, т.е.

(5) $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$.

Очевидно за функцията $q(t) + \delta q(t)$ **действието S следва да се увеличи**. Изменението (увеличението) на действието вследствие замяната $q(t) \to q(t) + \delta q(t)$ ще се даде с разликата

(6) $$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt .$$

След като развием $L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)$ в ред по степените на δq и $\delta \dot{q}$ и се ограничим само с членовете от първи порядък, ще имаме

$$\int_{t_1}^{t_2} L(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t)\, dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \approx \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q, \dot{q}, t) + \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] dt - \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)\, dt \equiv \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] dt .$$

И така, изменението на действието вследствие замяната $q(t) \to q(t) + \delta q(t)$ се дава с интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] dt .$$

Необходимо условие за минимизирането на действието S се явява нулирането на първата вариация (или просто вариацията) на горния интеграл (*което математически изразява принципа на най-малкото действие*). Следователно можем да запишем, че

(7) $$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] dt = 0 ,$$

или след провеждане на варирането

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q} \right] dt = 0 , \quad \text{т.е.}$$

(8) $$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \right) \delta q\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q}\, dt = 0}.$$

Ако вземем предвид обстоятелството, че

(9) $$\delta \dot{q} = \frac{d}{dt} \delta q ,$$

то за вторият интеграл в (9) може да се приложи интегриране по части, което ще даде

(10) $$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta\dot q\,dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\frac{d}{dt}\delta q\,dt\equiv\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)d(\delta q)=\ \dots\ \textit{по части}\ \dots\ =$$

$$=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\Bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\delta q\;d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)=\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\Bigg|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\;dt\,.$$

Замествайки $\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta\dot q\,dt$ от (43) в (42), получаваме

$$\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\Bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)\delta q\,dt-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\;dt=0,\ \text{или още}$$

(11) $$\boxed{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\Bigg|_{t_1}^{t_2}+\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\;dt=0}.$$

Но изразът $\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\Bigg|_{t_1}^{t_2}=\left(\frac{\partial L(q,\dot q,t_2)}{\partial \dot q}\right)\delta q(t_2)-\left(\frac{\partial L(q,\dot q,t_1)}{\partial \dot q}\right)\delta q(t_1)\equiv 0$, понеже съгласно (5) $\delta q(t_1)=\delta q(t_2)=0$. С отчитането на това обстоятелство (11) добива вида

(12) $$\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q\;dt=0.$$

При произволен избор на вариациите δq горното равенство е възможно само, ако подинтегралната функция в (12) е равна на нула, т.е.

(13) $$\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}=0,$$

което представлява уравнение на Лагранж за система с една степен на свобода.

При наличие на система с s- степени на свобода се осъществява независимо вариране от типа на това, което бе направено по-горе, за всяка от s-те на брой функции $q_i(t)$ за $i=1,2,\dots,s$, в резултат от което се получава система от s на брой независими уравнения (уравнения на Лагранж)

(14) $$\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}=0\ \text{ за }\ i=1,2,\dots,s.$$

Приложение 3: Извод на уравнението на Хамилтон-Якоби:

При извода на уравненията на Лагранж от принципа на най-малкото действие разглеждахме интеграла (действието)

$$S=\int_{t_1}^{t_2}L(q,\dot q,t)\,dt,$$

взет по траектории между **две зададени положения** $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$, които системата заема в моменти време t_1 и t_2. При вариране на действието се сравняваха стойностите на този интеграл за близки траектории, имащи едни и същи начални и крайни точки $q(t_1)$ и $q(t_2)$. Само една от тези траектории съответства на истинското движение, и това е траекторията, за която интегралът (действието) S е минимален.

Нека сега разгледаме понятието действие S в друг аспект, а именно да считаме че S е величина, характеризираща движението по истинската траектория, и да сравним стойностите, които S приема за траектории $q(t)$, имащи **общо начало** $q(t_1) = q^{(1)}$, но минаващи в момент $t = t_2$ през различни положения. С други думи ще разглеждаме интегралът **действие** S (за истинските траектории) като функция на своята горна интеграционна граница. Тогава за изменението на действието S при преход от една траектория към друга (близка на нея) траектория за система с една степен на свобода можем да запишем /използвайки изведеното вече представяне (11) от предишното Приложение 2/

(1) $$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\; dt\,.$$

Тук за разлика от случая с фиксирано начало и фиксиран край, за който приемахме $\delta q(t_1) = \delta q(t_1) = 0$, сега е **фиксирано само началото на траекторията**, т.е. в сила е **само**

(2) $\delta q(t_1) = 0$,

докато $\delta q(t_2) \neq 0$.

Ако обозначим (за удобство) $\delta q(t_2) = \delta q$, то (1) добива вида

(3) $$\delta S = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\; dt\,.$$

Обаче за „истинската" траектория на движението е в сила уравнението на Лагранж $\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$, от което веднага следва, че интегралът $\int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q\; dt$ в дясната страна на (3) е равен на нула. Отчитайки, че $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = p$ (p - *обобщен импулс*), стигаме до заключението, че вариацията (3) на действието ще добие вида

(4) $\delta S = p\,\delta q$,

а в общия случай за система с s-степени на свобода

(5) $$\boxed{\delta S = \sum_{i=1}^{s} p_i\,\delta q_i}.$$

От последното съотношение следва, че частните производни от действието S по координатите q_i дават точно обобщените импулси p_i, т.е.

(6) $$\boxed{p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}}.$$

Резюме: Действието S може да се разглежда като **явна функция на времето**, описваща движението по траектории, започващи в даден начален момент t_1 от **фиксирана начална точка** $q^{(1)}$, но завършващи във **фиксирана крайна точка** $q^{(2)}$ **<u>в различни моменти време</u>** $t_2 \equiv t$.

Тогава **частната производна по времето** $\dfrac{\partial S}{\partial t}$ на интерпретираната по гореописания начин функция (действие) S може да бъде намерена или посредством вариране на интеграла S, или по следния по-оригинален начин:

За действието S (*по определение*) е в сила представянето

(7) $\dfrac{dS}{dt} = L$, където L е функция на Лагранж.

От друга страна, разглеждайки действието S като функция на обобщените координати q_i и времето t (*в указания по-горе смисъл*), можем да запишем за неговата пълна производна по времето

(8) $\dfrac{dS}{dt} = \dfrac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} \dfrac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i =$ *… с отчитането на (6) …* $= \dfrac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} p_i \, \dot{q}_i$.

От сравняването на двете представяния (7) и (8) за $\dfrac{dS}{dt}$ стигаме до равенството

$\dfrac{\partial S}{\partial t} + \sum_{i=1}^{s} p_i \, \dot{q}_i = L$, т.е.

(9) $\dfrac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_{i=1}^{s} p_i \, \dot{q}_i \equiv -\left(\sum_{i=1}^{s} p_i \, \dot{q}_i - L \right) \equiv -H(p_i, q_i, t)$.

И така достигаме до уравнението

(10) $\dfrac{\partial S}{\partial t} + H(p_i, q_i, t) = 0$.

Ако в това уравнение обобщените импулси p_i заместим с частните производни от действието, т.е. $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ /виж (6)/, то получаваме следното диференциално уравнение за действието:

(11) $\boxed{\dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_1, q_2, .. q_s; \dfrac{\partial S}{\partial q_1}, \dfrac{\partial S}{\partial q_2}, ..., \dfrac{\partial S}{\partial q_s}, t \right) = 0}$.

Това <u>частно диференциално уравнение от първи ред</u> се нарича **<u>уравнение на Хамилтон-Якоби</u>**. То е нелинейно, понеже частните производни $\dfrac{\partial S}{\partial q_i}$, т.е. импулсите p_i съгласно (6), фигурират в него във втора степен.

***<u>Забележка</u>**: Цитираните в настоящото ръководство задачи (Стр. *xxx*, Зад. *yyy*) визират „**Сборник задачи по теоретична физика**", с автори **Кръстю Иванов**, **Вълю Великов**, **Стефка Казакова**, Пловдивско университетско издание, **2002 г**.

Март 2010 г. Гл. ас. Петко Митев